

Dowód przez rzut makaronem

Tymon Świtalski

26 listopada 2025

Problem motywujący

Dla skończonego zbioru liczb zespolonych (wektorów) $A \subset \mathbb{C}$, możemy wybrać jego podzbiór $B \subset A$. Oczywiście, z nierówności trójkąta, zachodzi

$$\left| \sum_{z \in B} z \right| \leq \sum_{z \in A} |z|.$$

Dla dobrze wybranego podzbioru B , możemy jednak też uzyskać

$$C \left| \sum_{z \in B} z \right| \geq \sum_{z \in A} |z| \tag{1}$$

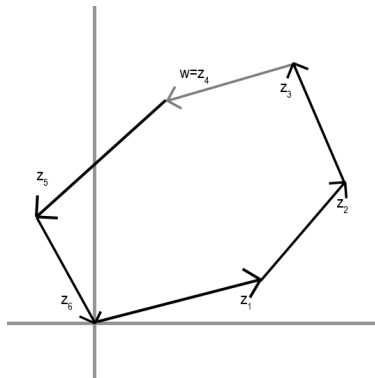
z pewną stałą $C > 0$. Problem polega na znalezieniu jak najmniejszej stałej C , takiej aby dla każdego zbioru A , istniał podzbiór $B \subset A$, który spełnia nierówność (1).

Problem motywujący

Dla danego $A \subset \mathbb{C}$, zdefiniujemy $w := -\sum_{z \in A} z$ oraz $A' := A \cup \{w\}$.

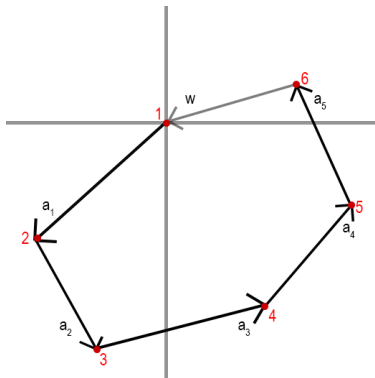
Możemy bez straty ogólności założyć, że $z \neq 0$, dla każdego $z \in A'$.

Porządkujemy liczby z A' względem argumentu głównego, rosnąco. $A' = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ dla $\arg(z_1) \leq \arg(z_2) \leq \dots \leq \arg(z_n)$. Interpretując je jako wektory z odpowiednim punktem zaczepienia otrzymujemy wielokąt wypukły:



Problem motywujący

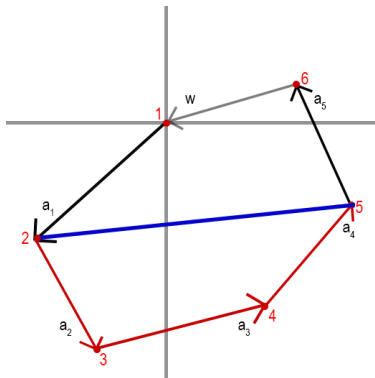
Przesuńmy ten wielokąt tak aby w kończył się w początku układu współrzędnych i wprowadźmy nową numerację na wierzchołki i wektory z $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Problem motywujący

Dowolna odległość między wierzchołkami w tak powstałym wielokącie D , wyraża się jako długość sumy pewnych wektorów z A .

Istnieje zatem podzbiór $B \subset A$, taki że $\left| \sum_{z \in B} z \right| = d$, gdzie d jest średnicą D .

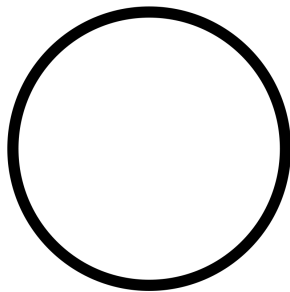


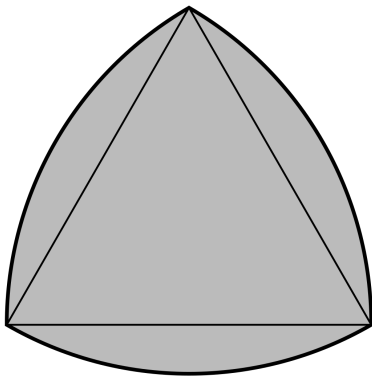
Problem motywujący

Jeśli znajdziemy stałą C taką że $L \leq Cd$, gdzie d jest średnicą dowolnego wielokąta wypukłego, a L jego obwodem, rozwiążemy nasz problem:

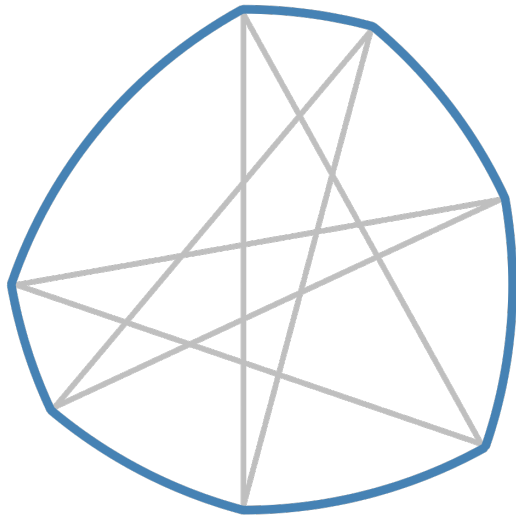
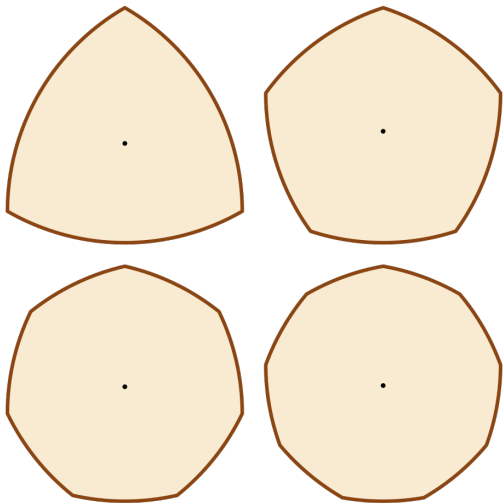
$$C \left| \sum_{z \in B} z \right| = Cd \geq L = \sum_{z \in A} |z| + |w| \geq \sum_{z \in A} |z|.$$

Jaka jest najlepsza taka stała?





Figury o stałej szerokości



Twierdzenie Barbiera

Twierdzenie Barbiera (1860)

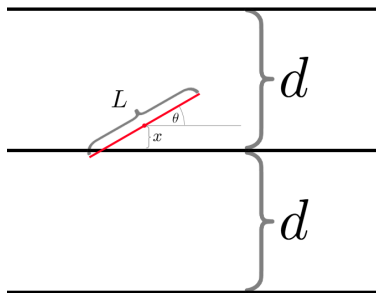
Obwód każdej figury o stałej szerokości d wynosi $\pi \cdot d$.

Uwaga

Ponadto, dla dowolnej wypukłej figury o średnicy d , jej obwód jest mniejszy lub równy $\pi \cdot d$.

Igła Buffona

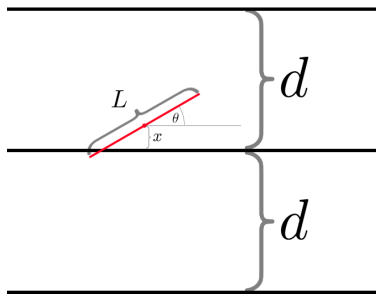
Rozważmy igłę o długości L , którą rzucamy na płaszczyznę podzieloną równoległymi prostymi. Kolejne proste są w odległości d od siebie, przy czym $d \geq L$.



Jakie jest prawdopodobieństwo że igła przetnie którąś z prostych?

Igła Buffona

Łatwo sprawdzić, że igła przecina prostą wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq \frac{L}{2} \sin(\theta)$.



$$\mathbb{P}(\text{Igła przecina prostą}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{L}{2} \sin(\theta)} \frac{2}{d} dx d\theta = \frac{2L}{d\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta = \frac{2L}{d\pi}.$$

Zamiast prawdopodobieństwa możemy rozważyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej

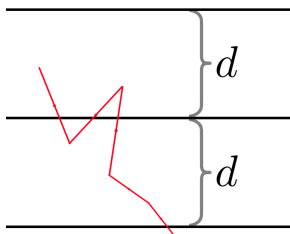
$$X = \begin{cases} 1, & \text{gdy igła przetnie prostą,} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wtedy

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(\text{igła przecina prostą}) = \frac{2L}{d\pi}.$$

Makaron Buffona

Możemy rozważyć łamaną igłę, złożoną z n igieł o długościach $L_1, \dots, L_n \leq d$. Długość łamanej to $L = L_1 + \dots + L_n$.

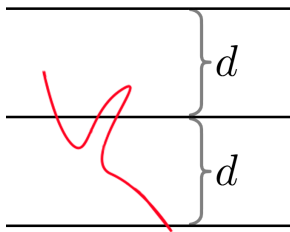


Niech X będzie zmienną losową wyrażającą liczbę przecięć łamanej z prostymi. Możemy zapisać $X = X_1 + \dots + X_n$, zatem

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n = \sum_{i=1}^n \frac{2L_i}{d\pi} = \frac{2L}{d\pi}.$$

Makaron Buffona

Możemy zrobić przejście graniczne, przybliżając dowolną (odpowiednio regularną) krzywą długości L odpowiednimi łamanymi wpisanymi, długości L_n . Dostajemy wtedy tak zwany "makaron Buffona" (*ang. Buffon's noodle*).

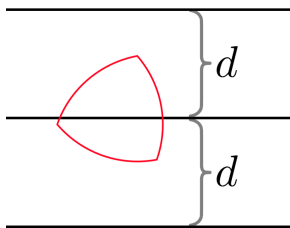


Jeśli X to zmienna losowa wyrażająca liczbę przecięć makaronu z prostymi, wtedy

$$\mathbb{E}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2L_n}{d\pi} = \frac{2L}{d\pi}$$

Dowód twierdzenia Barbiera

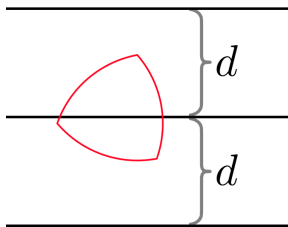
Co jeśli rzucimy makaronem w kształcie figury o stałej szerokości d ? (o obwodzie L)



Ponownie mamy,

$$\mathbb{E}X = \frac{2L}{d\pi}.$$

Dowód twierdzenia Barbiera



Z drugiej strony, wypukła figura o stałej szerokości zawsze przecięnie prostą w dwóch miejscach, czyli $X \equiv 2$.

$$2 = \mathbb{E}X = \frac{2L}{d\pi}$$

$$L = d \cdot \pi$$



J. F. Ramaley.

Buffon's noodle problem.

American Mathematical Monthly, 76(8):916–918, 1969.



D. A. Klain and G.-C. Rota.

Introduction to geometric probability.

Cambridge University Press, 1997.



G. Richards.

Reuleaux triangle — *Wikimedia Commons*.

2024. Online:

https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_polygon#/media/File:ReuleauxTriangle.svg
(Accessed: 22 May 2025).



Wikimedia Commons.

File:Reuleaux polygons.svg — *Wikimedia Commons*.

2025. Online: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Reuleaux_polygons.svg&oldid=1098150513 (Accessed: 26 November 2025).



Wikimedia Commons.

File:Reuleaux polygon construction.svg — *Wikimedia Commons*.

2025. Online: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Reuleaux_polygon_construction.svg&oldid=1004929904 (Accessed: 26 November 2025).

Dziękuję za uwagę!