

Wycena opcji finansowych z wykorzystaniem metody Monte Carlo

Paweł Lotko

Koło Naukowe Matematyków Politechniki Łódzkiej

Ogólnopolska Matematyczna Konferencja Studentów
"OMatKo!!!"

Plan działania

- Definicje,
- Wycena opcji europejskiej,
- Metoda drzewa,
- Metoda siatki,
- Estymator dolny,
- Estymator połówkowy,
- Estymator punktowy,
- Wyniki.

Model rynku

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $T \geq 0$ filtracją tej przestrzeni. Omawiany rynek składa się z $n + 1$ instrumentów bazowych, których cecny opisują procesy

$$\{S_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{(S_t^1, \dots, S_t^n)\}, \quad (1)$$

$$\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}, \quad (2)$$

adaptowane do filtracji z podanymi wartościami początkowymi S_0, B_0 . Dodatkowo chcemy, aby były elementami przestrzeni $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Instrumenty pochodne

Definicja 1

Niech $0 < t \leq T$ oraz S_t oznacza cenę instrumentu bazowego, na który wystawiony jest instrument pochodny, wówczas:

- Instrumentem pochodnym typu europejskiego nazywamy zmienną losową $h(S_t)$ na przestrzeni $L^2(\Omega, F_T, \mathbb{P})$.
- Instrumentem pochodnym typu amerykańskiego nazywamy proces stochastyczny $\{h(t, S_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ na przestrzeni $L^2(\Omega, F_t, \mathbb{P})$.

Cena arbitrażowa

Definicja 2

- Ceną arbitrażową instrumentu $h(S_t)$ w chwili $t \leq T$ o zapadalności w chwili T nazywamy wartość:

$$Q_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[h(S_T) \frac{B_t}{B_T} \middle| F_t \right]. \quad (3)$$

- Ceną arbitrażową instrumentu $h(u, S_u)$ w chwili $t \leq T$ o zapadalności w chwili T nazywamy wartość:

$$Q_t = \max_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[h(\tau, S_\tau) \frac{B_t}{B_T} \middle| F_t \right]. \quad (4)$$

Dodatkowe uwagi

- Zakładamy, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu, to znaczy:
 - Nie istnieje strategia pozwalająca inwestorowi osiągnąć zysk z zerowym ryzykiem,
 - Istnieje miara $\mathbb{P}^*$, równoważna $\mathbb{P}$ taka, że zdyskontowana cena akcji $\bar{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$ jest względem niej martyngałem, nazywana dalej miarą martyngałową.
- Miara rynkowa $\mathbb{P}$ pokrywa się z miarą martyngałową $\mathbb{P} = \mathbb{P}^*$,
- Będziemy zajmować się wyceną instrumentu w chwili $t = 0$, a jego wartość oznaczать będziemy przez Q .

Estymator Monte Carlo

Definicja 3

Niech $\{X(1), \dots, X(b)\}$ będzie zbiorem niezależnych realizacji S_T w chwili T , a $\{h(X(1)), \dots, h(X(b))\}$ zbiorem obliczonych dla nich wypłat z h . Wówczas wartość estymatora Monte Carlo wyraża się wzorem:

$$\hat{Q}_b = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b h(X(i)). \quad (5)$$

Dzięki temu estymatorowi możemy łatwo przybliżać cenę opcji typu europejskiego na jedno jak i wiele aktyw. Nie potrzebne są dodatkowe założenia odnośnie rynku z wyjątkiem tego, aby był dany rozkład S_t .

Własność markowa

Mówimy, że proces S_t spełnia własność Markowa, jeżeli:

Dla dowolnych $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$ oraz zbioru borelowskiego A zachodzi równość:

$$\mathbb{P}(S_{t_k} \in A | S_{t_{k-1}}, \dots, S_1) = \mathbb{P}(S_{t_k} \in A | S_{t_{k-1}}).$$

W dalszej części referatu będziemy zakładać, że procesy S_t, B_t spełniają podaną własność względem miary martyngałowej.

Wycena opcji amerykańskich - metoda drzewa

Wprowadźmy dyskretną przestrzeń czasową $t = 0, 1, \dots, T$. Zakładamy, że gęstości $f(t, x, \cdot)$ procesu S_{t+1} zdefiniowane jako:

$$\mathbb{P}(S_{t+1} \in A | S_t = x) = \int_A f(t, x, u) du \quad (6)$$

są ciągłe i znane dla dowolnego zbioru borelowskiego A . Szukamy funkcji $Q(t, \cdot)$ określonej następująco:

$$\begin{cases} Q(T, x) = h(T, x) \\ Q(t, x) = \max\{h(t, x), C(t, x)\}, \text{ dla } t < T, \end{cases} \quad (7)$$

gdzie:

$$C(t, x) = \mathbb{E}[Q(t+1, S_{t+1}) | S_t = x]. \quad (8)$$

Analogicznie do metody Monte Carlo w przypadku opcji europejskich tworzymy estymator $\hat{C}(0, S_0)$ jako:

$$\hat{C}(0, S_0) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \hat{Q}(1, X_1(i)), \quad (9)$$

gdzie $\hat{Q}(1, \cdot)$ to aproksymacja $Q(1, \cdot)$ uzyskana dla $X_1(1), \dots, X_1(b)$, jednak aby ją znaleźć musimy znowu dla każdego $X_1(i)$ losować b punktów z rozkładu o gęstości $f(1, X_1(i), \cdot)$. Iterując tą procedurę dojdziemy ostatecznie do momentu T , dla którego nie musimy już losować wspomnianych punktów i tworzyć estymatora.

Wycena opcji amerykańskich - metoda siatki

- Generujemy siatkę z niezależnych wektorów $X_t(i)$ dla $t = 1, \dots, T$ i $i = 1, \dots, b$ z rozkładu o gęstości $g(t, \cdot)$.
- Ponieważ S_0 jest dane to $X_0(1) = S_0$,
- Następnie dla $i = 1, \dots, b$ definiujemy funkcję $\hat{Q}_b^H(t, \cdot)$ taką, że:

$$\begin{cases} \hat{Q}_b^H(T, X_T(i)) = h(T, X_T(i)), \text{ dla } t = T, \\ \hat{Q}_b^H(t, X_t(i)) = \max\{h(t, X_t(i), \hat{C}(t, X_t(i)))\}, \text{ dla } t = T-1, \dots, 1, \end{cases}$$

- Tym razem jednak mamy

$$\hat{C}(t, X_t(i)) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{Q}_b^H(t+1, X_{t+1}(j)) \omega(t, X_t(i), X_{t+1}(j)). \quad (10)$$

Przy czym, czynnik $\omega(t, X_t(i), X_{t+1}(j))$ będziemy nazywać wagą dołączoną do punktów $X_t(i), X_{t+1}(j)$ oraz

$$\omega(t, X_t(i), X_{t+1}(j)) = \frac{f(t, X_t(i), X_{t+1}(j))}{g(t+1, X_{t+1}(j))}. \quad (11)$$

Tak dobrane wagi zapewniają, że $\hat{C}(t, X_t(i))$ dobrze estymuje wartość $C(t, X_t(i))$.

Gęstość siatkowa

Wybór gęstości siatkowej jest kluczowy, w wycenie instrumentów metodą siatki. Wprowadza się tak zwaną gęstość średnią daną wzorem:

$$g(t, X_{t+1}(j)) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b f(t+1, X_t(k), X_{t+1}(j)). \quad (12)$$

Estymator dolny

Zajmiemy się teraz poszukiwaniem estymatora dolnego takiego, że:

$$\mathbb{E}[\hat{Q}_b^L] \leq Q. \quad (13)$$

Chcemy również aby był przynajmniej asymptotycznie zgodny z Q . W tym celu symulujemy p niezależnych trajektorii procesu S_t . Dla każdej z nich wyznaczamy pierwszy optymalny moment wykonania jako:

$$\hat{\tau}_b^k = \min\{t : h(t, S_t^k) \geq \hat{Q}_b^H(t, S_t^k)\}. \quad (14)$$

Ostatecznie otrzymujemy pierwszy estymator spełniający rządane kryteria - estymator ścieżkowy.

$$\hat{q}_b^L = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p h(\hat{\tau}_b^k, S_{\hat{\tau}_b^k}^k). \quad (15)$$

Estymator połówkowy

Kolejnym estymatorem, którego będziemy używać jest estymator połówkowy. Podzielmy zbiór indeksów $I = \{1, \dots, b\}$ na dwa rozłączne podzbiory A oraz $A' = I \setminus A$. Estymator połówkowy podobnie, jak siatkowy definiujemy rekurencyjnie:

$$q_b^{LL}(T, x) = h(T, x) \quad (16)$$

oraz

$$\hat{q}_b^{LL}(t, x) = \begin{cases} h(t, x), & \text{jeśli } h(t, x) \geq \hat{C}_A(t, x), \\ \hat{C}_{A'}(t, x), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (17)$$

gdzie $\hat{C}_B(t, x) = \frac{1}{|B|} \sum_{I \in B} \hat{q}_b^{LL}(t+1, X_{t+1}(I)) \omega(t, x, X_{t+1}(I))$.

Estymator punktowy

Ostatnim estymatorem, który będzie nas interesował, będzie estymator punktowy. Najprostszym sposobem konstrukcji jest określenie go jako średnią ważoną estymatorów górnego i dolnego:

$$\hat{Q}^P = \gamma \hat{Q}^H + (1 - \gamma) \hat{q}^L, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (18)$$

Jednak z uwagi na problemy związane z obciążeniem estymatora górnego, lepszym wyjściem mogłoby być przyjęcie następującego estymatora punktowego:

$$\hat{Q}^{PP}(t, x) = \begin{cases} h(T, x), & \text{dla } t = T, \\ \gamma \hat{Q}^H(t, x) + (1 - \gamma) \hat{q}^{LL}(t, x), & \text{w pozostałych wypadkach.} \end{cases} \quad (19)$$

Wyniki

Rozważamy opcję, której funkcja wypłaty ma postać: $\max\{0, K - S_t\}$. Chcemy porównać wartości otrzymywane przez stosowanie różnych wprowadzonych estymatorów, ich obciążenie oraz błąd standardowy. Proces cen akcji S_t będzie opisany równaniem Blacka-Scholesa:

$$dS_t^k = S_t^k[rdt + \sigma_k dW_t^k], \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n; t \in [0, T], \quad (20)$$

Natomiast proces cen obligacji dany jest przez:

$$B_t = \exp(rt). \quad (21)$$

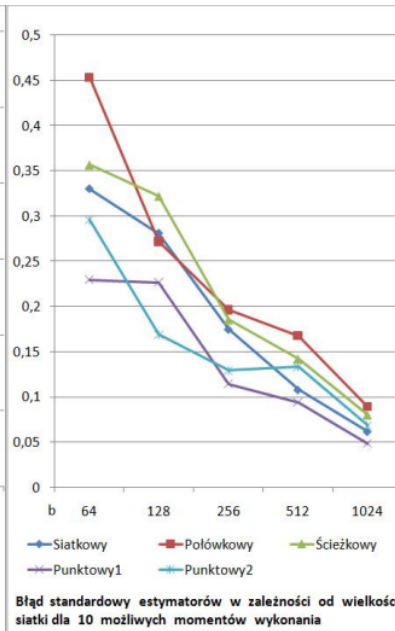
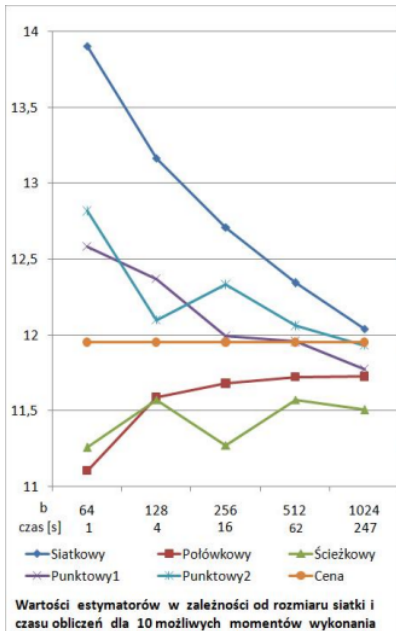
Parametry wejściowe są równe:

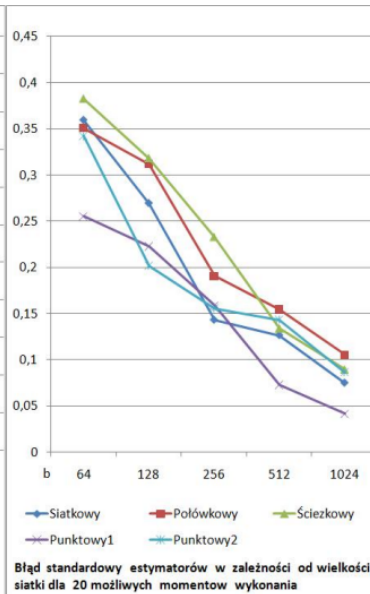
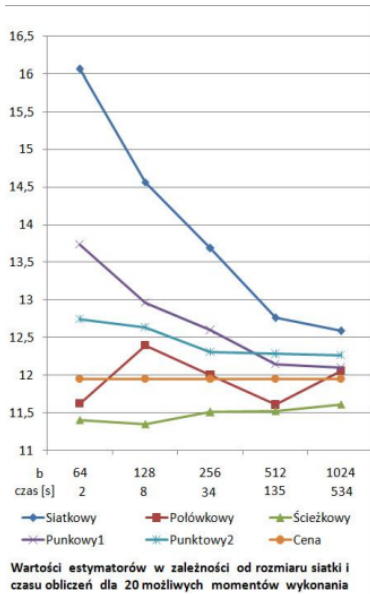
- $S_0 = 100$
- $\sigma = 0,4$
- $r = 0,1$

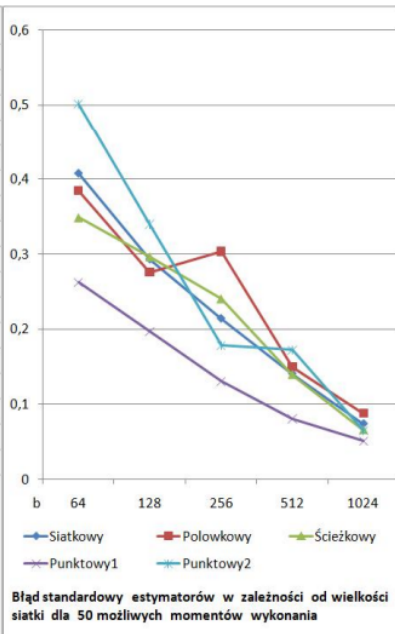
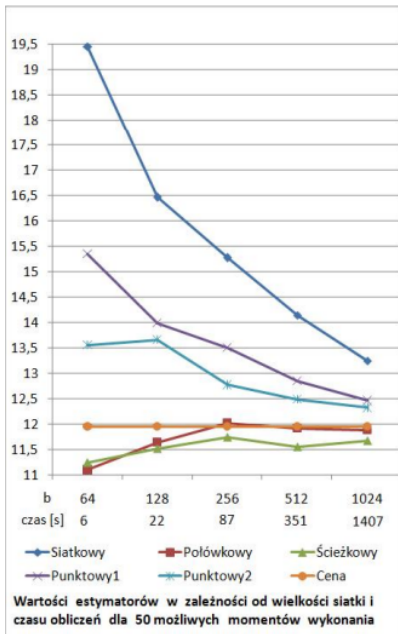
- $K = 100$
- $T = 1$ rok.

Wprowadzamy dodatkowo dane dotyczące używanych narzędzi:

- $N = 20$
- $d = 10, 20, 50$
- $b = 64, 128, 256, 512, 1024$.







Bibliografia

- M. Śmieja, *Praca magisterska: Zastosowanie metody Monte Carlo w wycenie opcji finansowych*, Kraków 2009,
- A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne,
- J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa, Instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006,
- Wiśniewski T. *Koncepcja wyceny opcji rzeczywistych metodą symulacji Monte Carlo*.