

Od Lindelöfa do Menger'a – kombinatoryczne spojrzenie na własności pokryciowe

Aleksandra Łukasik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Grudzień 2025

Pojęcia wstępne

Przez przestrzeń rozumiemy przestrzeń topologiczną.

Definicja

Pokryciem otwartym przestrzeni nazywamy rodzinę zbiorów otwartych, która w sumie daje całą przestrzeń. Rodzinę pokryć otwartych przestrzeni X będziemy oznaczać $\mathcal{O}(X)$.

Definicja

Rodzinę zbiorów $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ nazywamy γ -pokryciem otwartym X , jeżeli dla każdego $x \in X$ zbiór $\{n : x \notin U_n\}$ jest skończony. Oznaczamy to $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Gamma(X)$.

Pojęcia wstępne

Definicja

Rodzinę zbiorów $\mathcal{U}$ nazywamy ω -pokryciem otwartym X , jeżeli $X \notin \mathcal{U}$ oraz dla każdego zbioru skończonego $F \subseteq X$ istnieje zbiór $U \in \mathcal{U}$ taki, że $F \subseteq U$. Oznaczamy to $\mathcal{U} \in \Omega(X)$.

Definicja

Rodzinę zbiorów $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ nazywamy λ -pokryciem otwartym X , jeżeli dla każdego $x \in X$ zbiór $\{n : x \in U_n\}$ jest nieskończony. Oznaczamy to $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Lambda(X)$.

Definicja własności przestrzeni

Dla rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \{\mathcal{O}, \Gamma, \Omega\}$ definiujemy następujące własności, które może posiadać przestrzeń:

$S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: dla każdego $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \in \mathcal{A}$ istnieją $U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2 \dots$, takie że

$$\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B},$$

$S_{\text{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: dla każdego $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \in \mathcal{A}$ istnieją zbiory skończone $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{U}_2 \dots$, takie że

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \in \mathcal{B},$$

$U_{\text{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: dla każdego $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \in \mathcal{A}$ istnieją zbiory skończone $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{U}_2 \dots$, takie że

$$\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}.$$

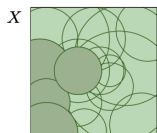
Definicja

Własność $U_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \Gamma)$ nazywamy własnością Hurewicza, $U_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \Omega)$ własnością Scheepersa oraz $S_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ własnością Menger'a.

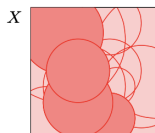
Definicja

Przestrzeń X nazywamy *przestrzenią Lindelöfa*, jeśli dla każdego $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$ istnieje $\mathcal{V} \in \mathcal{O}(X)$, takie że $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ oraz $|\mathcal{V}| \leq \aleph_0$.

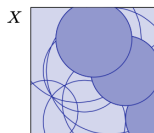
Schemat własności Mengera



$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1$$



$$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2$$



$$\mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{U}_3$$

...



Przestrzeń Baire'a

Definicja

Niech $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów liczb naturalnych, czyli zbiorem wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Zbiór ten możemy traktować jako produkt $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}$ przeliczalnie wiele kopii $\mathbb{N}$.

Jeśli na zbiorze liczb naturalnych wprowadzimy topologię przestrzeni dyskretnej, to na rozważanym iloczynie możemy wprowadzić topologię produktową τ_B . Przestrzeń topologiczną $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \tau_B)$ nazywamy przestrzenią Baire'a.

Uwaga

Niech P oznacza pewną własność, taką że istnieje zbiór w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, który nie posiada własności P . Przez $\text{non}(P)$ oznaczamy minimalną moc zbioru w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, który nie spełnia P .

Implicacje zachodzące pomiędzy przedstawionymi własnościami w klasie przestrzeni Lindelöfa można przedstawić na diagramie:

Diagram Scheepersa

Hurewicz	Scheepers	Menger
$U_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \Gamma)$ $\mathfrak{h}$	$U_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \Omega)$ $\mathfrak{d}$	$S_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ $\mathfrak{d}$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$S_1(\Gamma, \Gamma)$ $\mathfrak{h}$	$S_1(\Gamma, \Omega)$ $\mathfrak{d}$	$S_1(\Gamma, \mathcal{O})$ $\mathfrak{d}$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$S_1(\Omega, \Gamma)$ $\mathfrak{p}$	$S_1(\Omega, \Omega)$ $\text{cov}(\mathcal{M})$	$S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ $\text{cov } \mathcal{M}$

$\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$

Definicja liczb kardynalnych

Liczby znajdujące się w diagramie są krytycznymi liczbami kardynalnymi dla danej własności, czyli oznaczają minimalną moc podprzestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, która nie posiada danej własności.

Przedstawimy teraz ich definicje:

Definicja

Dla $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zachodzi $f \leq^* g$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $k \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $n \geq k$ jest spełnione, że $f(n) \leq g(n)$.

Definicja

Niech $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Zbiór $D \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nazywamy *dominującym*, gdy

$$(\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(\exists g \in D)(f \leq^* g).$$

Minimalną moc zbioru dominującego w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznaczamy $\mathfrak{d}$.

Definicja liczb kardynalnych

Definicja

Niech $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nazywamy *ograniczonym*, gdy:

$$(\exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})(\forall f \in A)(f \leq^* g).$$

Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nazywamy *nieograniczonym*, gdy nie jest ograniczony. Minimalną moc zbioru nieograniczonego w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznaczamy $\mathfrak{b}$.

Uwaga

Zachodzi, że $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Definicja liczb kardynalnych

Przypomnienie

Zbiorem pierwszej kategorii nazywamy zbiór, który można przedstawić w postaci przeliczalnej sumy zbiorów nigdziegęstych.

Definicja

Minimalną moc rodziny $\mathcal{A}$ zbiorów I -kategorii w przestrzeni $\mathbb{R}$, takich że zachodzi $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}$ oznaczamy przez $\text{cov}(\mathcal{M})$.

Wprowadzenie historyczne

Przypomnienie

Przestrzeń σ -zwartą nazywamy przestrzeń topologiczną, która da się przedstawić jako suma przeliczalnie wielu swoich podzbiorów zwartych.

W 1924 roku Menger zaobserwował, że dla przestrzeni X , która jest σ -zwarta zachodzi, że posiada własność, że dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ tej przestrzeni istnieją zbiory $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$, takie że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(B_n) = 0 \text{ oraz } X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Postawił hipotezę, że własność ta charakteryzuje σ -zwartość w klasie przestrzeni metrycznych, która została później obalona przez Sierpińskiego.

Wprowadzenie historyczne

Hurewicz przedstawił własność Menger'a w równoważnej postaci bez odwoływania się do metryki, co pozwoliło rozszerzyć własność Menger'a na wszystkie przestrzenie topologiczne. Własność Menger'a jest jedną z najważniejszych własności w prezentowanej tematyce.

Kombinatoryczne własności pokryciowe

Kombinatoryczne własności pokryciowe są własnościami topologicznymi opartymi na generowaniu pokrycia danej przestrzeni topologicznej z ciągu pokryć tej przestrzeni. Pochodzą one z różnych obszarów matematyki m.in. topologii, teorii mnogości czy teorii miary. Rozważane własności nazywamy kombinatorycznymi, ponieważ są powiązane ze strukturą kombinatoryczną przestrzeni Baire'a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Kombinatoryka odgrywa również rolę w konstruowaniu przestrzeni posiadających rozważane własności.

Przykład

Definicja

Przekształcenie $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nazywamy *górnie ciągłym*, jeśli dla dowolnych liczb $n, m \in \mathbb{N}$ zbiór

$$\{x \in X : \varphi(x)(n) \leq m\}$$

jest otwarty w X .

Twierdzenie

Przestrzeń Lindelöfa X jest $S_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przekształcenia górnie ciągłego $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ obraz $\varphi[X]$ nie jest dominujący.

Wniosek

Zachodzi, że $\text{non}(S_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})) = \mathfrak{d}$.

Dowód.

Jeśli $|X| < \mathfrak{d}$ to na mocy powyższego twierdzenia X jest $S_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. Niech $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem mocy $\mathfrak{d}$. Weźmy funkcję identycznościową $\text{id}: X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Funkcja id jest górnice ciągła oraz obraz $\text{id}[X]$ jest dominujący. Zatem na podstawie przetoczonego twierdzenia X nie spełnia $S_{\text{fin}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. □

Dziękuję za uwagę!

Bibliografia

A. Blass, Combinatorial cardinal characteristics of the continuum Handbook of Set Theory

P. Szewczak, Autoreferat

A. Łukasik, Charakteryzacja kombinatoryczne własności pokryciowych