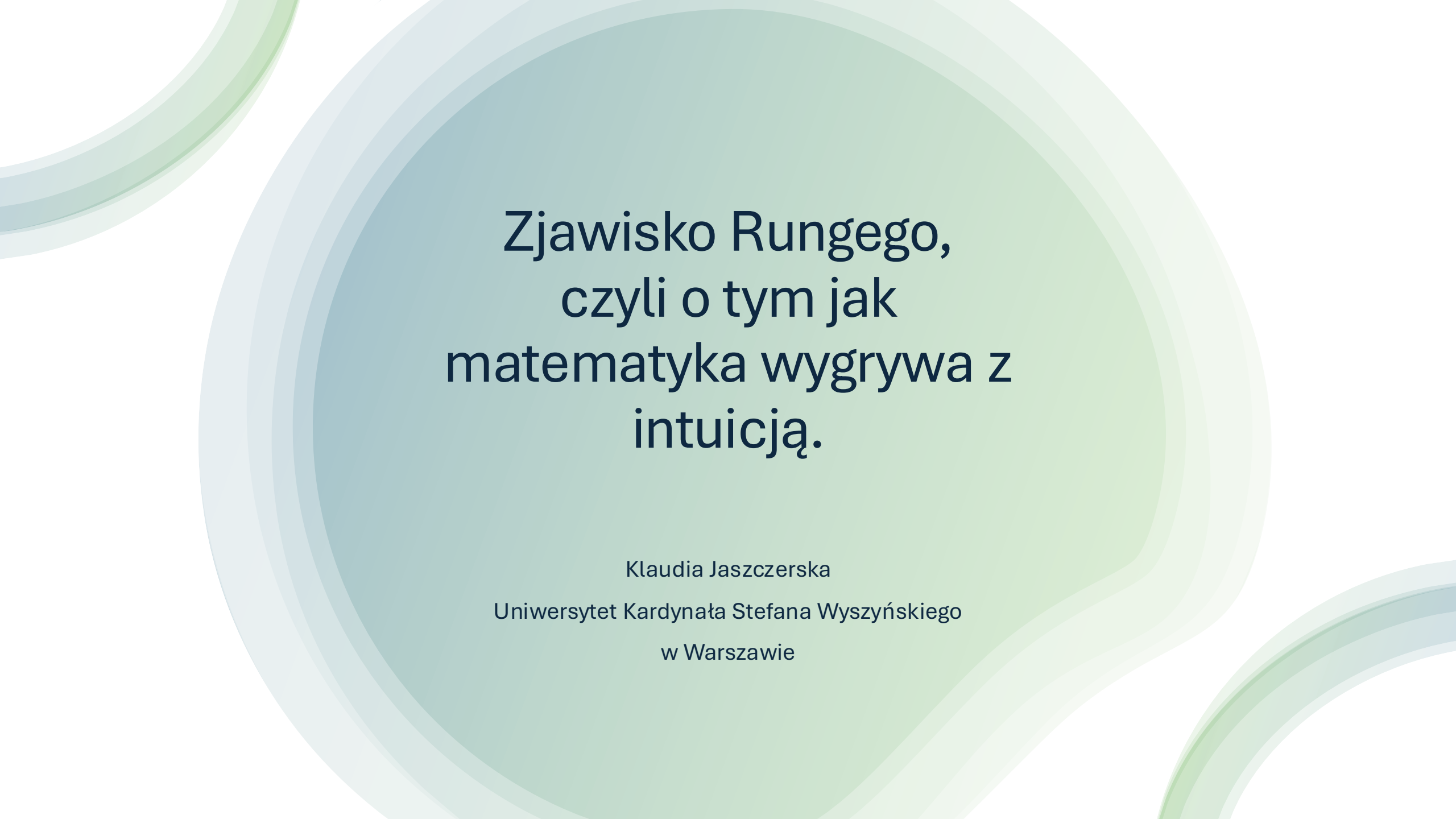




Zjawisko Rungego, czyli o tym jak matematyka wygrywa z intuicją.

Klaudia Jaszczerka

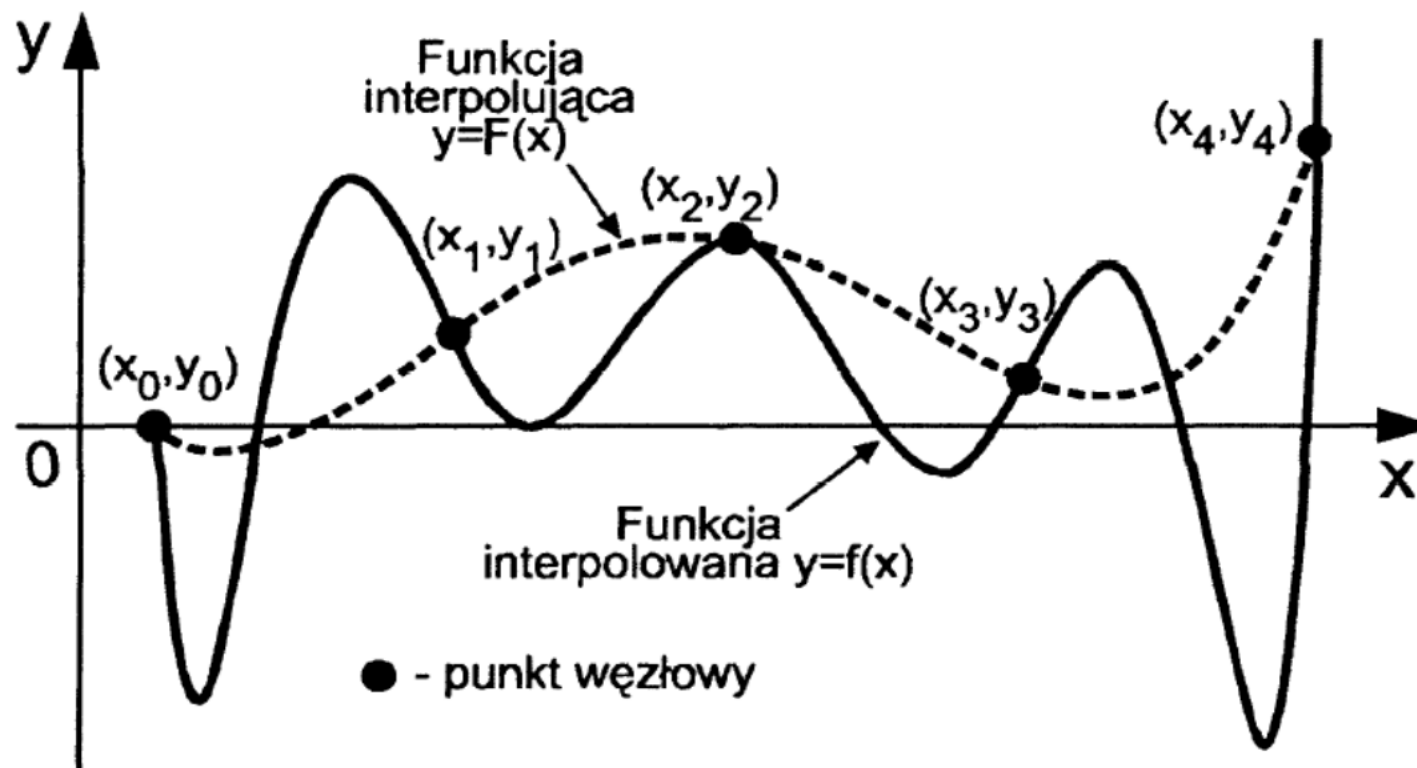
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
w Warszawie

Google

🕒 interpolacja wielomianowa co to



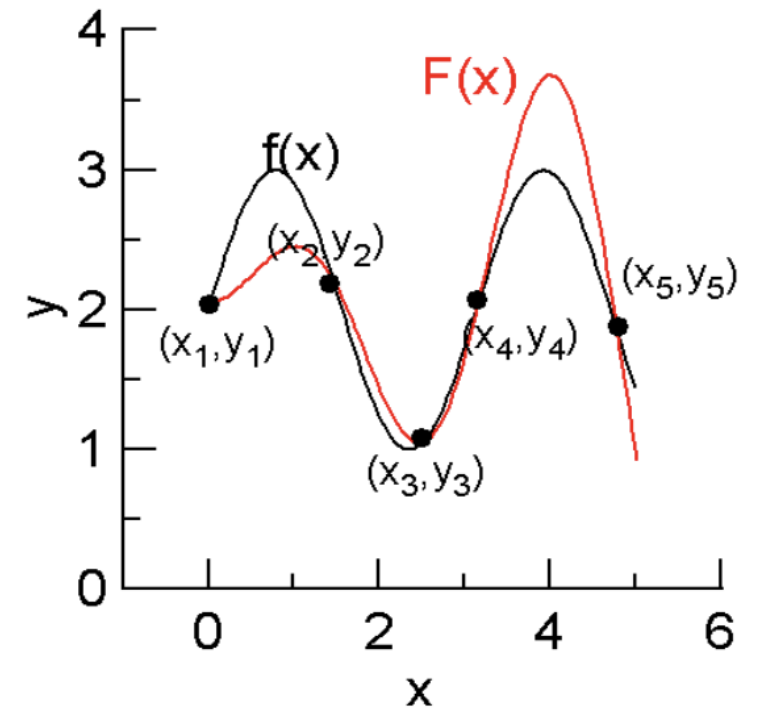
🌐 Tryb AI



Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) y_i$$



Prosty przykład interpolacji Lagrange'a

x	5	-7	-6	0
$f(x)$	1	-23	-54	-95

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6) \cdot 5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6).$$

$$w(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x)$$

$$w(x) = l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 95l_3(x)$$

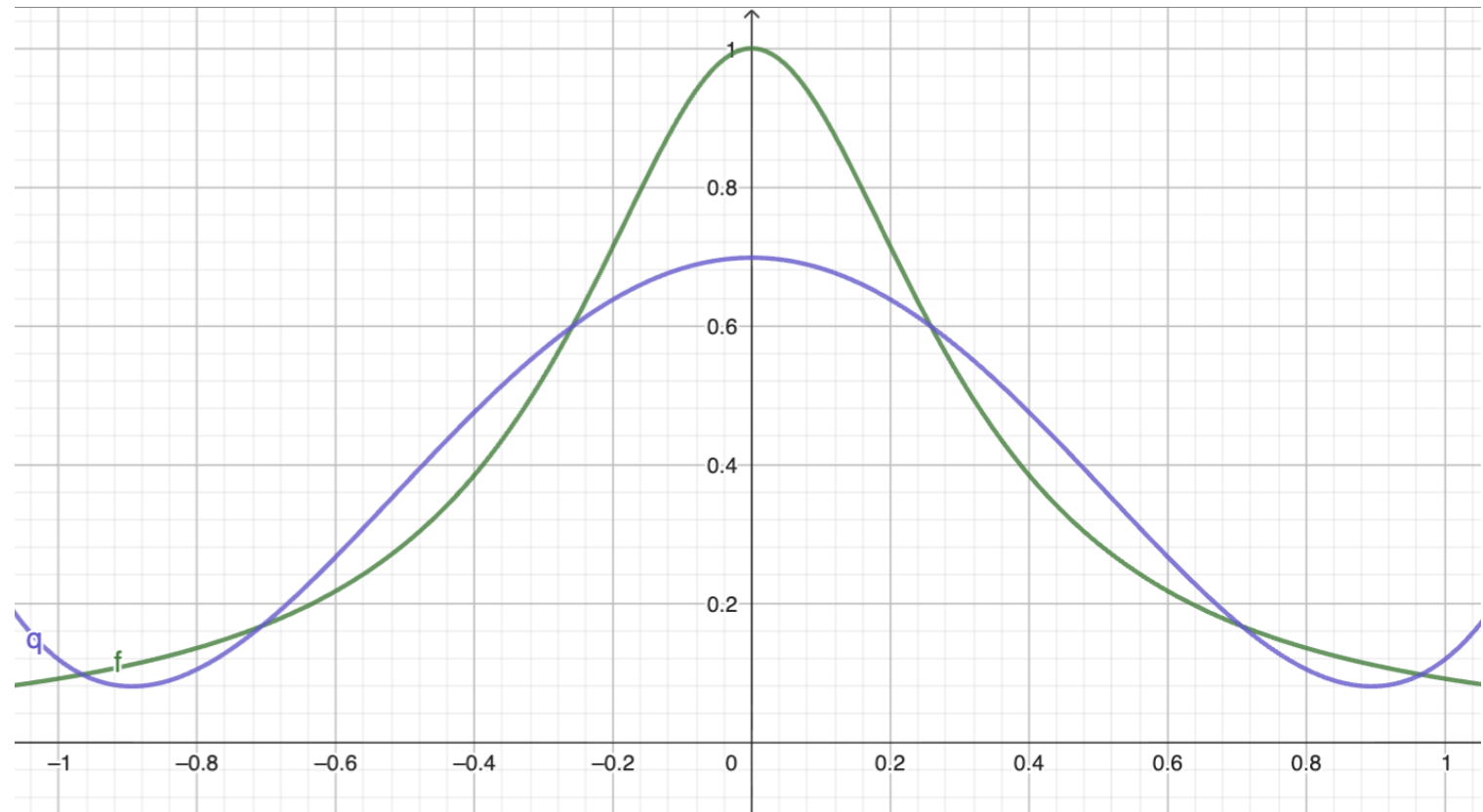
$$w(x) = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x - 23 \cdot \left(-\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x \right) - 54 \cdot \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x - 95 \cdot \left(-\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6) \right)$$

$$w(x) = \frac{1}{210}(-19x^3 + 478x^2 + 2117x - 19950).$$

Błąd interpolacji

Błędem interpolacji na zbiorze B nazywamy wartość $R = \sup_{x \in B} |r(x)|$.

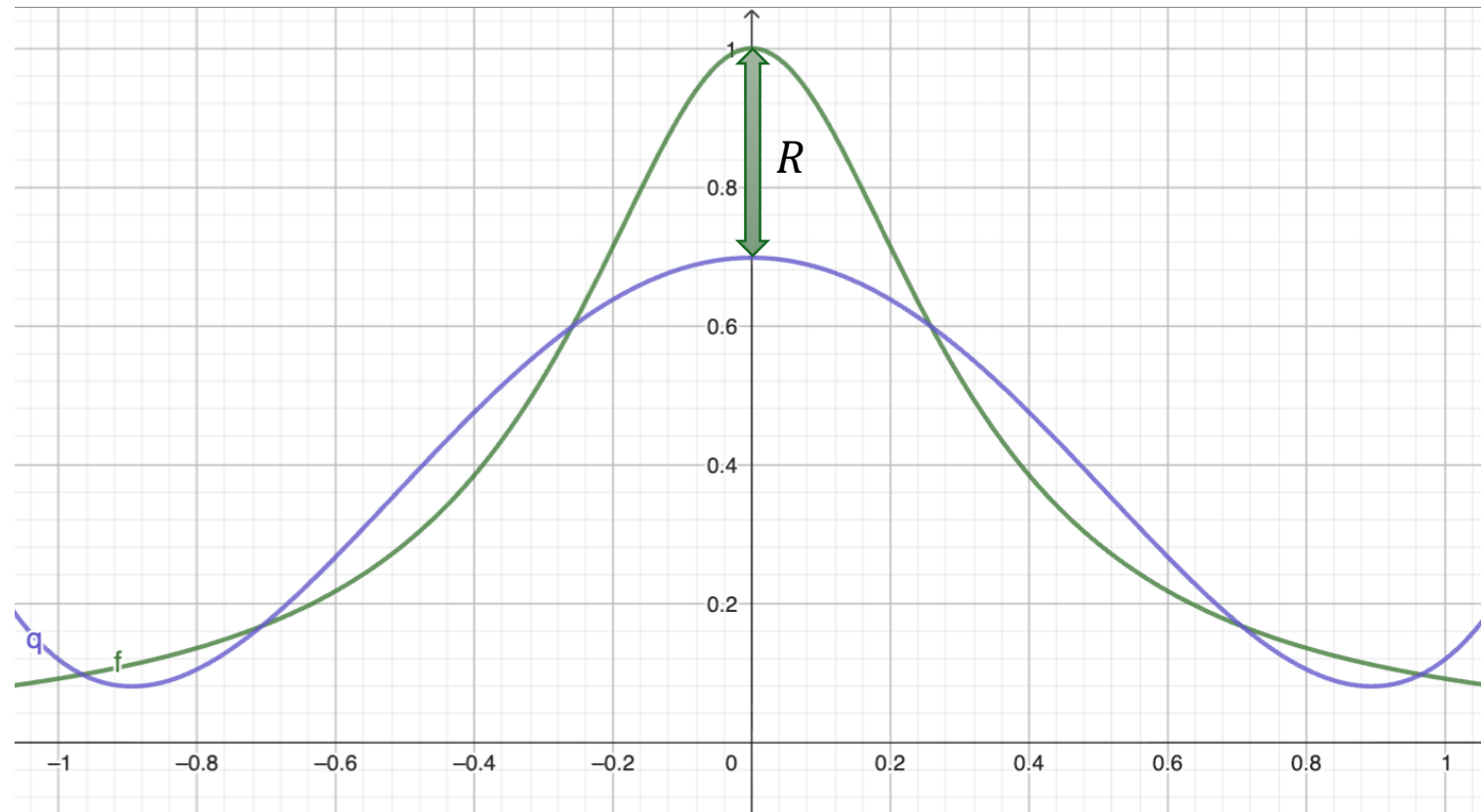
Gdzie $r(x)$ jest resztą interpolacyjną postaci:
 $r(x) = f(x) - q(x)$



Błąd interpolacji

Błędem interpolacji na zbiorze B nazywamy wartość $R = \sup_{x \in B} |r(x)|$.

Gdzie $r(x)$ jest resztą interpolacyjną postaci:
 $r(x) = f(x) - q(x)$



Węzły równoodległe



Wielomiany Czebyszewa

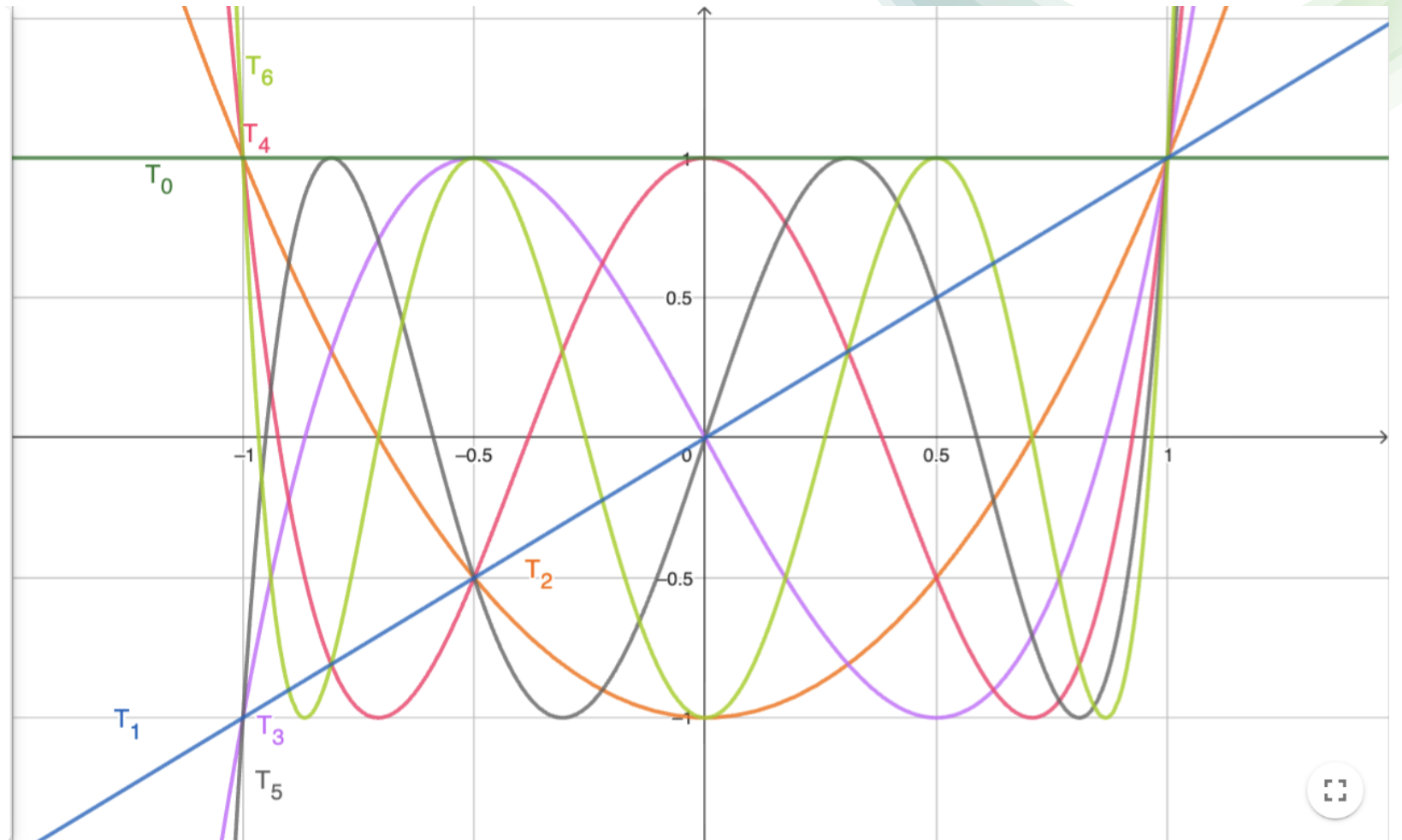
$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \text{ dla } k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

Własności wielomianów Czebyszewa

	$T_0: y = 1$
	$T_1: y = x$
	$T_2: y = 2x^2 - 1$
	$T_3: y = 4x^3 - 3x$
	$T_4: y = 8x^4 - 8x^2 + 1$
	$T_5: y = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
	$T_6: y = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

 GeoGebra Wykresy



Węzły Czebyszewa

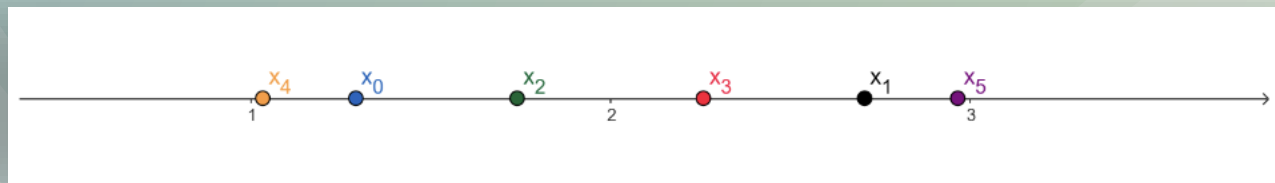
Węzłami Czebyszewa w przedziale $[a,b]$ nazywamy liczby $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, które są przeskalowanymi pierwiastkami wielomianu $T_{n+1}(x)$ do przedziału $[a,b]$, czyli

$$\tilde{T}_{n+1}(x_j) = T_{n+1}\left(\frac{x_j - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right) = 0 \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n.$$

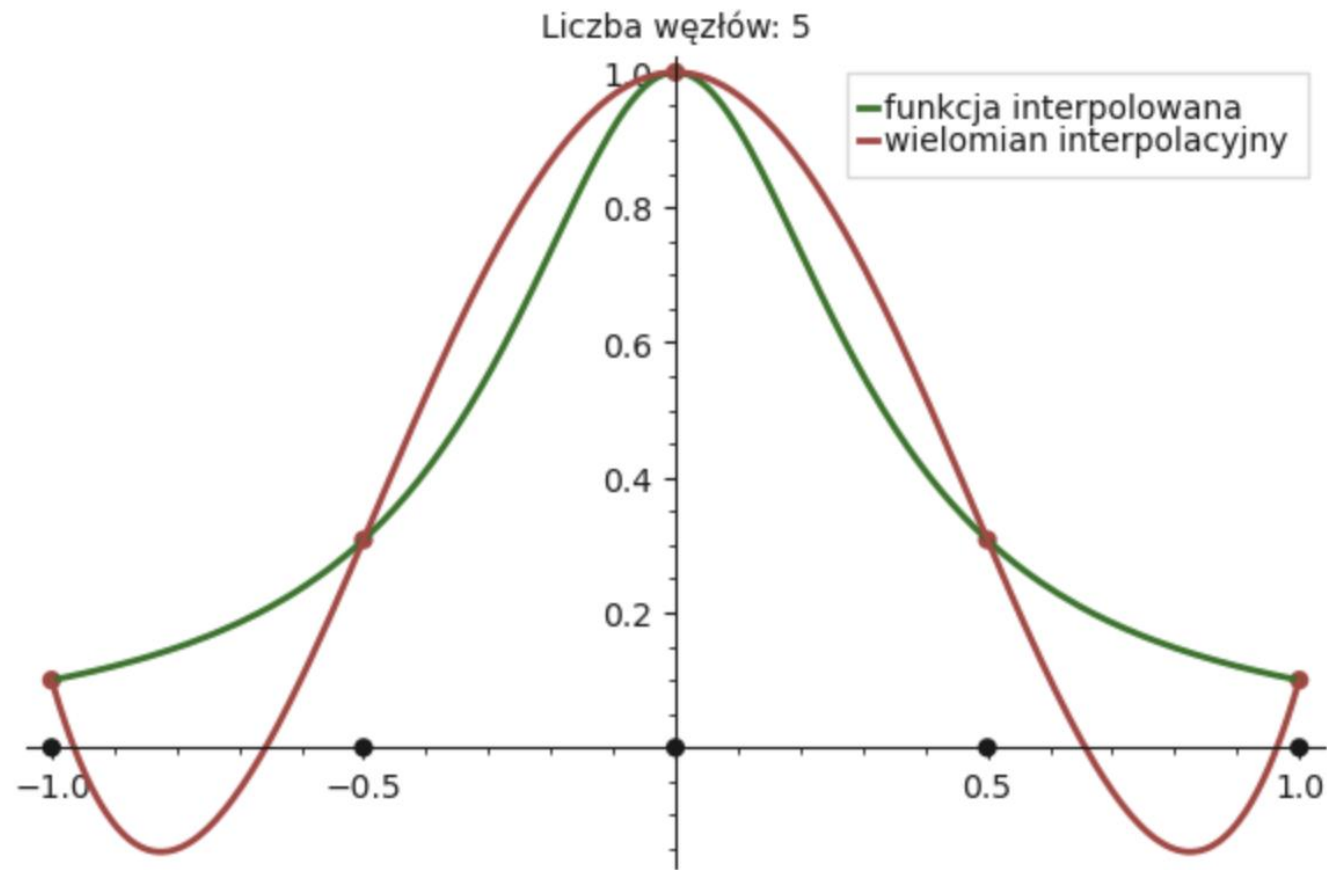
Przykład 6 węzłów Czebyszewa na przedziale [1,3]

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_6(x) &= T_6(x - 2) = \\ &= 32(x - 2)^6 - 48(x - 2)^4 + 18(x - 2)^2 - 1 = \\ &= 32x^6 - 384x^5 + 1872x^4 - 4736x^3 + 6546x^2 - 4680x + 1351\end{aligned}$$

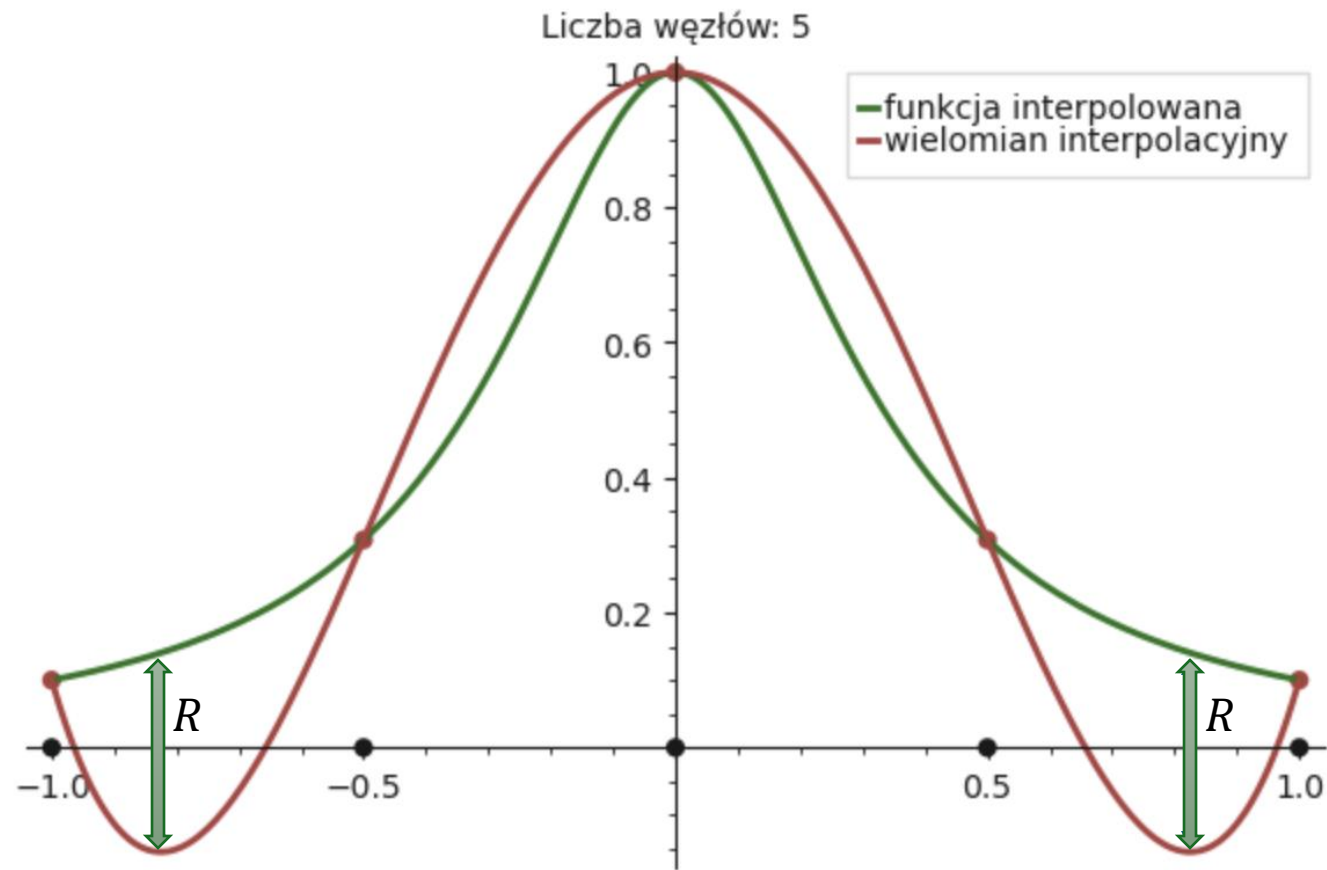
$$\begin{aligned}x_0 &= 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_1 &= 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_2 &= 2 - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \\ x_3 &= 2 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, & x_4 &= 2 + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, & x_5 &= 2 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$



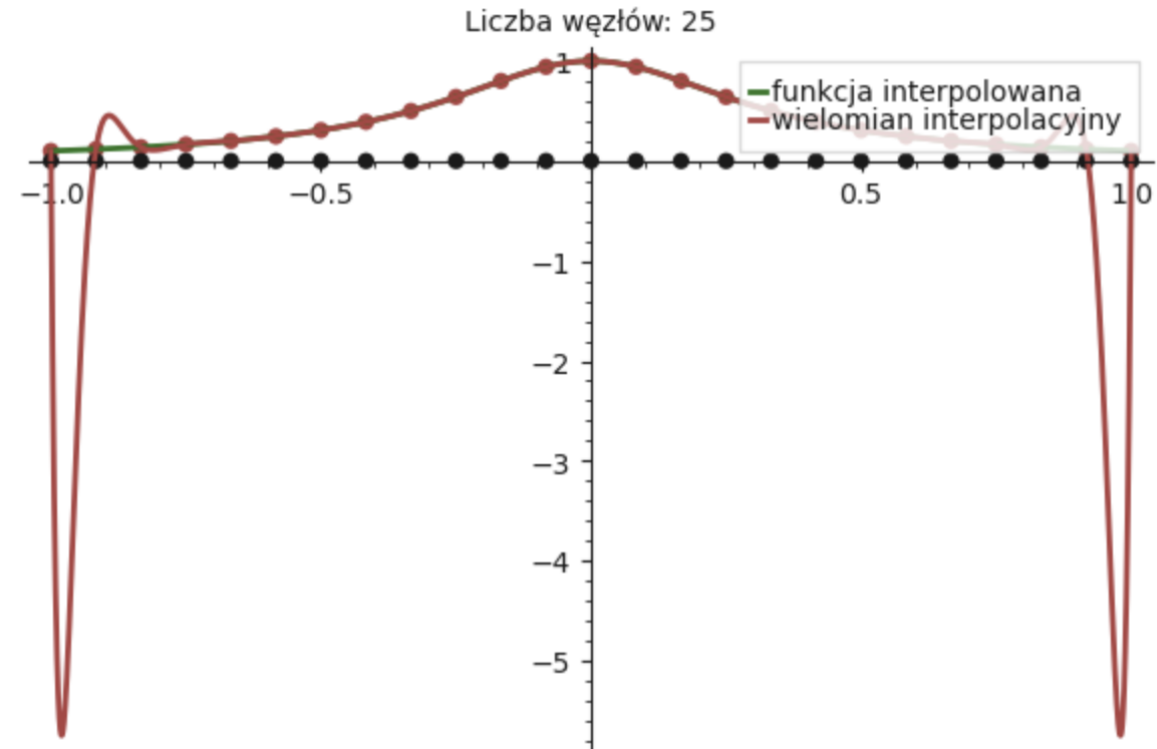
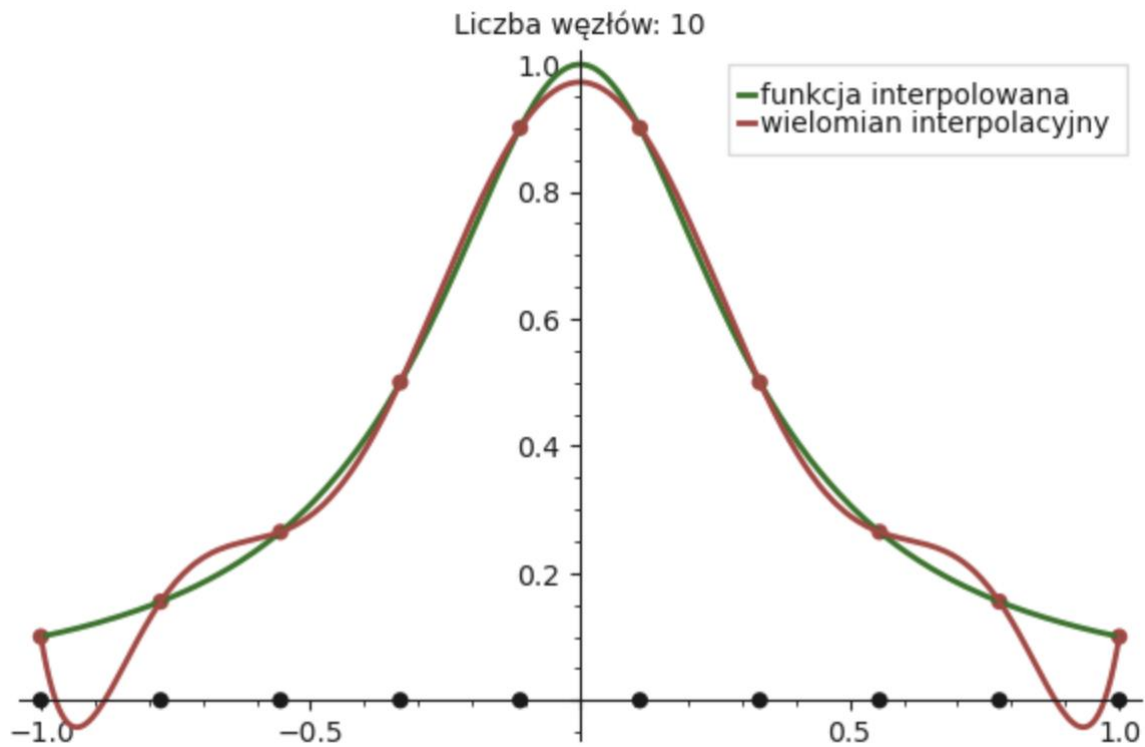
Zjawisko Rungego dla $f(x) = \frac{1}{1 + 9x^2}$



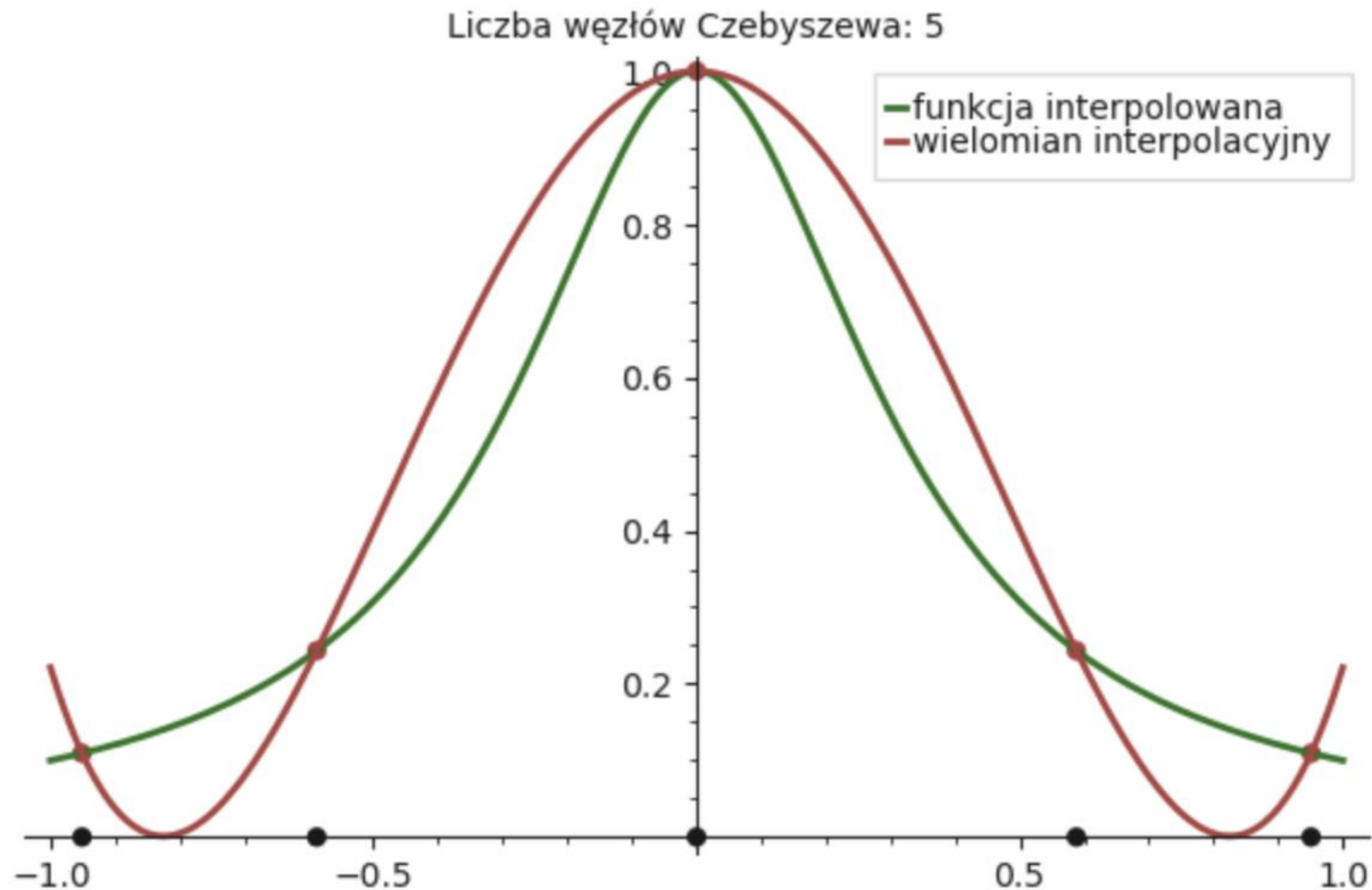
Zjawisko Rungego dla $f(x) = \frac{1}{1 + 9x^2}$



Zjawisko Rungego – węzły równoodległe

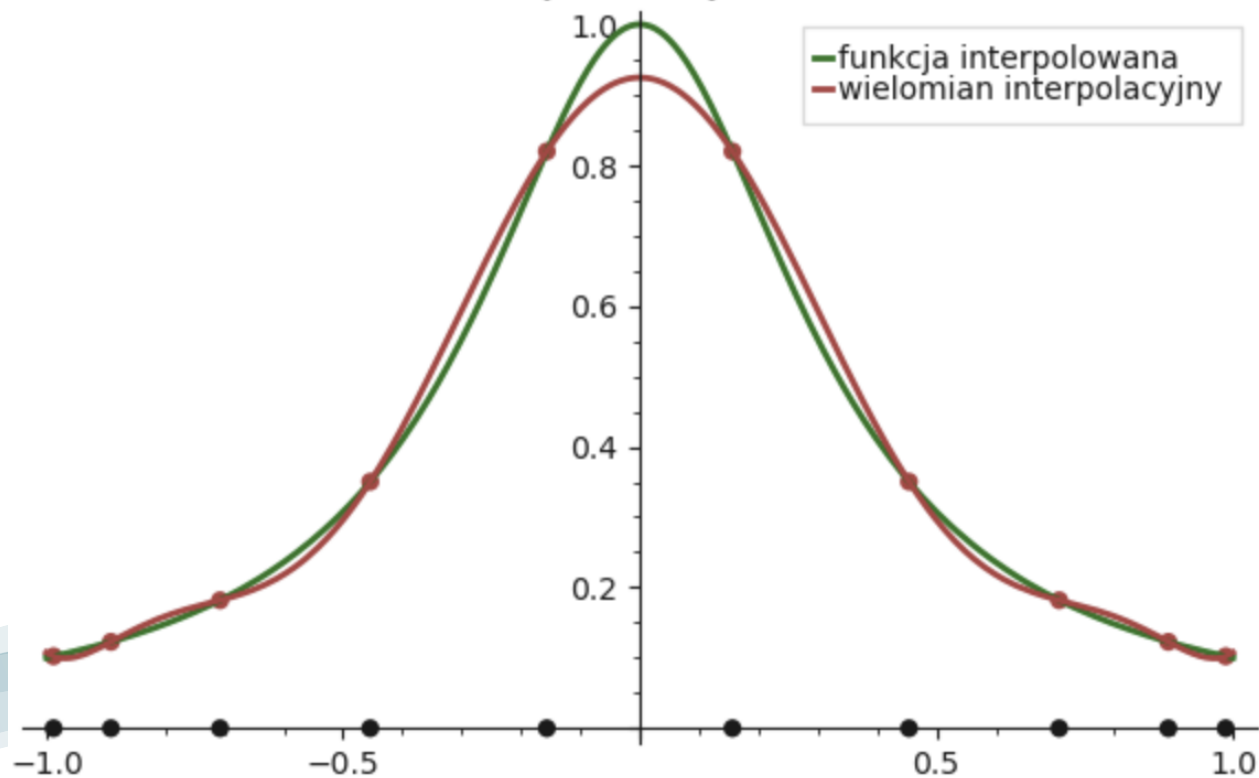


Zjawisko Rungego – węzły Czebyszewa

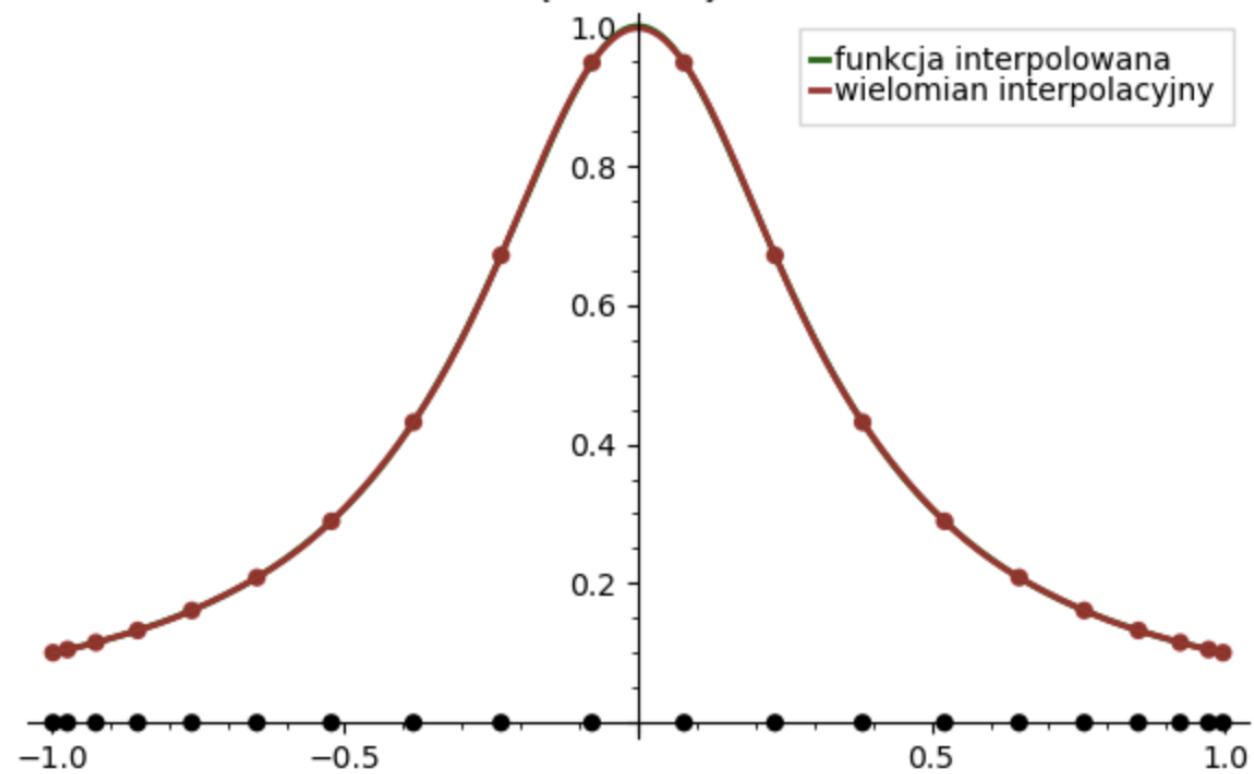


Zjawisko Rungego – węzły Czebyszewa

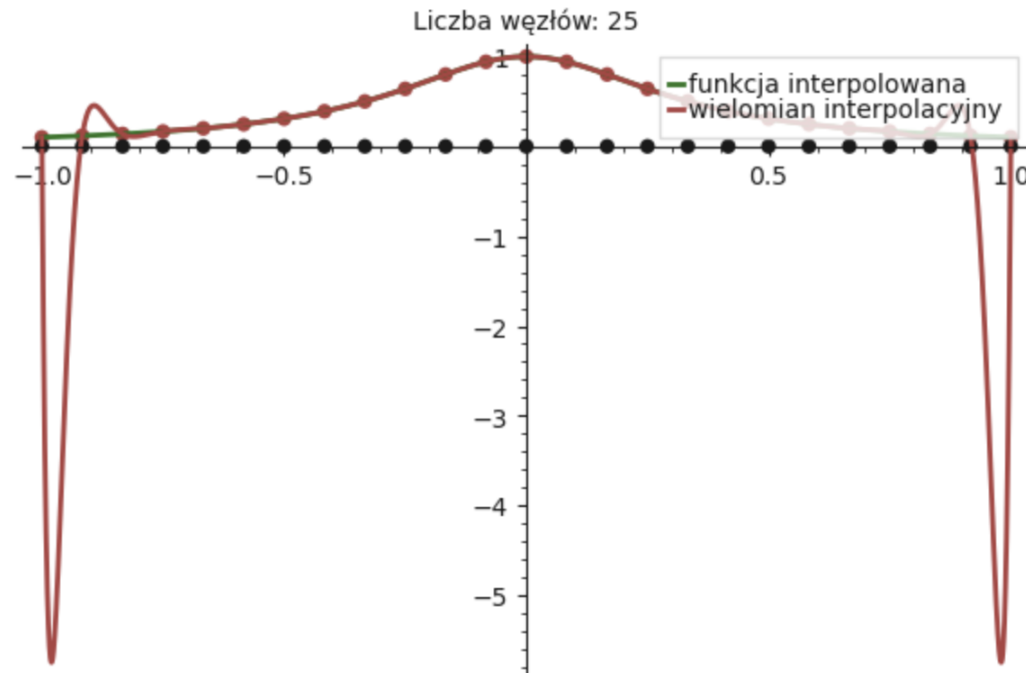
Liczba węzłów Czebyszewa: 10



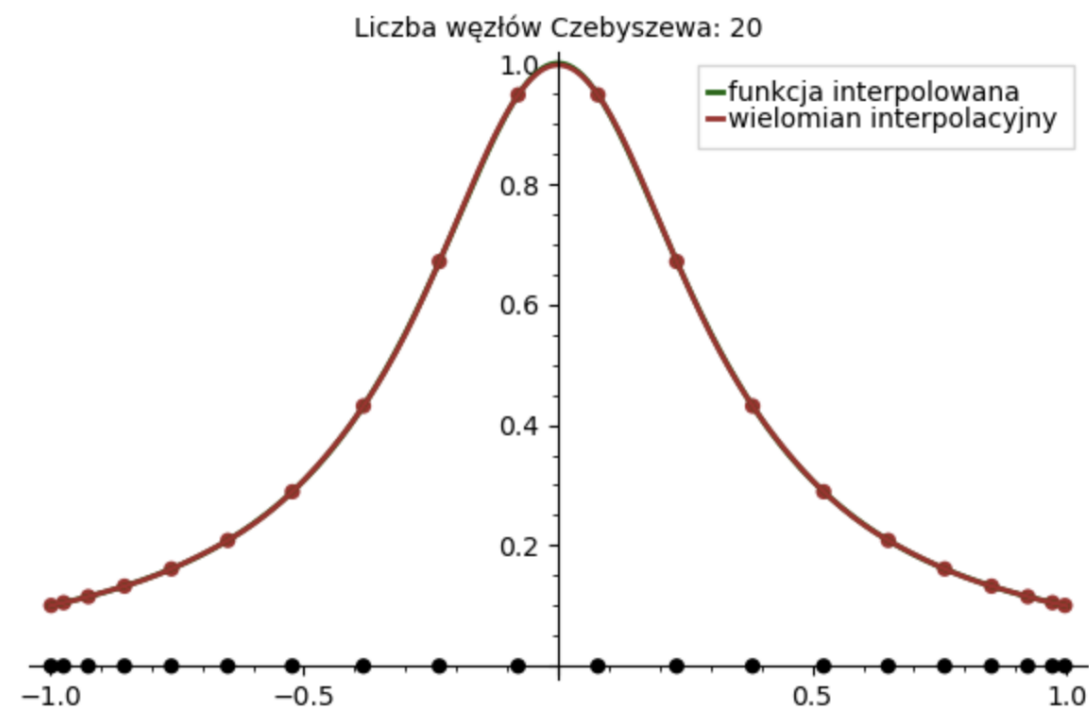
Liczba węzłów Czebyszewa: 20



Podsumowanie



węzły Czebyszewa



Bibliografia:

- Klaudia Jaszczerka „Interpolacja Wielomianowa” praca licencjacka
- David Kincaid i Ward Cheney. Analiza numeryczna. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2006.
- Janina i Michał Jankowscy. Przedgląd metod i algorytmów numerycznych, volume 1. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1981.
- dr hab. Szymon Wąsowicz, Tajniki interpolacji, część 7 i 9



Dziękuję za uwagę 😊