

Stery, czyli grupy, w których nie został wybrany element neutralny

Sara Kopczyńska

12.2025

O czym będę mówić?

- Definicja sterty
- Przykłady stert
- Własności stert
- Wiązary
- Przestrzenie afiniczne

Sterty - definicja

Stertą nazywamy parę $(H, [-, -, -])$ złożoną z niepustego zbioru H i trójargumentowej funkcji

$$[-, -, -] : H \times H \times H \rightarrow H, \quad (x, y, z) \mapsto [x, y, z],$$

spełniającej dla wszystkich $v, w, x, y, z \in H$ warunki:

$$[v, w, [x, y, z]] = [[v, w, x], y, z],$$

$$[x, x, y] = [y, x, x] = y,$$

Jeśli dodatkowo dla wszystkich $x, y, z \in H$ zachodzi reguła przemienności stert, czyli

$$[x, y, z] = [z, y, x],$$

to stertę H nazywamy **stertą abelową**.

Sterty - przykłady

Przykład

Niech $H = \{e\}$ oraz $[e, e, e] = e$. Wtedy $(H, [-, -, -])$ jest stertą.

Sterty - przykłady

Przykład

Niech $H = \{x, y\}$ oraz niech $[-, -, -] : H \times H \times H \rightarrow H$ będzie funkcją określoną w następujący sposób:

$$[x, x, y] = [y, x, x] = y,$$

$$[y, y, x] = [x, y, y] = x,$$

$$[x, x, x] = x,$$

$$[y, y, y] = y,$$

$$[x, y, x] = y,$$

$$[y, x, y] = x.$$

Wtedy $(H, [-, -, -])$ jest stertą abelową.

Sterty - przykłady

Przykład

Jeśli $(G, +)$ jest grupą to zbiór G z działaniem $[x, y, z] = x - y + z$ dla wszystkich $x, y, z \in G$ jest stertą.

Sterty - przykłady

Przykład

Niech H będzie podgrupą grupy G . Wtedy dla wszystkich elementów $g \in G$ warstwa $g + H$ z działaniem trójargumentowym $[a, b, c] = a - b + c$ określonym dla wszystkich $a, b, c \in g + H$ jest stertą.

Stery - przykłady

Przykład

Niech A będzie przestrzenią afiniczną stowarzyszoną z przestrzenią liniową V , rozpiętą nad ciałem $\mathbb{K}$. Określmy działanie trójargumentowe na zbiorze A przez

$$[a, b, c] = a + \overline{bc},$$

gdzie $a, b, c \in A$, natomiast $\overline{bc}$ jest wektorem o początku w punkcie b i końcu w punkcie c . Wówczas para $(A, [-, -, -])$ jest stertą abelowym.

Stwierdzenie

Niech $(H, [-, -, -])$ będzie stertą. Wtedy dla wszystkich $x, y, z, v, w \in H$

$$[v, w, [x, y, z]] = [v, [y, x, w], z].$$

Stery - własności

Niech $(H, [-, -, -])$ będzie stertą abelową.

Dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ oraz dla każdej permutacji σ zbioru $\{1, 3, \dots, 2n+1\}$ i dla każdej permutacji τ zbioru $\{2, 4, \dots, 2n\}$ zachodzą równości:

$$[h_1, \dots, h_{i-1}, h_i, h_i, h_{i+1}, \dots, h_{2n+1}] = [h_1, \dots, h_{i-1}, h_{i+1}, \dots, h_{2n+1}],$$

oraz

$$[h_1, h_2, \dots, h_{2n+1}] = [h_{\sigma(1)}, h_{\tau(2)}, h_{\sigma(3)}, \dots, h_{\sigma(2n+1)}].$$

Stwierdzenie

Niech $(H, [-, -, -])$ będzie stertą. Weźmy dowolny element $e \in H$ i zdefiniujmy działanie dwuargumentowe $\diamond_e$ na zbiorze H następująco

$$\diamond_e : H \times H \rightarrow H, \quad x \diamond_e y = [x, e, y],$$

dla wszystkich $x, y \in H$. Wtedy $(H, \diamond_e, e)$ jest grupą, w której element e jest elementem neutralnym, a element odwrotny do $x \in H$ jest dany przez $x^{-1} = [e, x, e]$.

Homomorfizmem stert $(H, [-, -, -])$ i $(\hat{H}, [-, -, -])$ nazywamy funkcję $\phi : H \rightarrow \hat{H}$ taką, że dla wszystkich $x, y, z \in H$ zachodzi

$$\phi([x, y, z]) = [\phi(x), \phi(y), \phi(z)].$$

Stwierdzenie

Niech będzie dana sterta H oraz elementy $e, f \in H$. Wtedy funkcja

$$\tau_e^f : (H, \diamond_e, e) \rightarrow (H, \diamond_f, f), \quad x \mapsto x \diamond_e f = [x, e, f],$$

jest izomorfizmem grup $(H, \diamond_e, e)$ i $(H, \diamond_f, f)$.

Przykład

Zbiór $\mathbb{Z}_5$ wraz z działaniem $[x, y, z] = (x - y + z)_5$, dla $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$ jest stertą. Przeanalizujemy działanie $\diamond_3$ grupy $(\mathbb{Z}_5, \diamond_3, 3)$.

$\diamond_3$	0	1	2	3	4
0	2	3	4	0	1
1	3	4	0	1	2
2	4	0	1	2	3
3	0	1	2	3	4
4	1	2	3	4	0

Grupa $(\mathbb{Z}_5, \diamond_3, 3)$ jest grupą izomorficzną z grupą $\mathbb{Z}_5$, a izomorfizm tych grup jest dany wzorem $\tau_0^3(x) = (x + 3)_5$.

x	0	1	2	3	4
$\tau_0^3(x)$	3	4	0	1	2

Wiązarem nazywamy stertę abelową $(T, [-, -, -])$ wyposażoną w łączne działanie dwóargumentowe $\cdot$, które nazywamy mnożeniem, takie, że działanie $\cdot$ jest rozdzielne nad działaniem sterty $[-, -, -]$, co oznacza, że dla wszystkich $a, b, c, d \in T$

$$a \cdot [b, c, d] = [a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d] \quad \text{oraz} \quad [a, b, c] \cdot d = [a \cdot d, b \cdot d, c \cdot d].$$

Przykład

Jeśli $(R, +, \cdot)$ jest pierścieniem to to zbiór R z działaniem sterty $[r, s, t] = r - s + t$ dla $s, t, r \in R$ i mnożeniem pierścienia $\cdot$ jest wiązarem. Wiązar ten oznaczamy przez $T(R)$.

Przykład

Jeśli wiązary T posiada element absorbujący $e \in T$, to grupa $(T, \diamond_e, e)$ z działaniem mnożenia w wiązarze T jest pierścieniem. Tak określony pierścień oznaczamy przez $R(T, e)$.

Definicja przestrzeni afinicznej

Przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy trójkę (A, G, ω) , gdzie A jest niepustym zbiorem, G jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, a $\omega : A \times A \rightarrow G$ jest funkcją taką, że

- dla każdego $a \in A$ i $g \in G$ istnieje $b \in A$, że $\omega(a, b) = g$,
- dla każdych $a, b \in A$ zachodzi $\omega(a, b) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$,
- dla każdych $a, b, c \in A$ mamy $\omega(a, b) + \omega(b, c) = \omega(a, c)$.

Niech T będzie wiązarem. Grupę abelową G wraz z działaniem $\cdot : T \times G \rightarrow G$ takim, że dla wszystkich $t, t', t'' \in T$ oraz $g, h \in G$ mamy

$$[t, t', t''] \cdot g = t \cdot g - t' \cdot g + t'' \cdot g$$

oraz

$$t \cdot (g + h) = t \cdot g + t \cdot h,$$

nazywamy **T -grupą**.

Przestrzenie T -afiniczne

Niech T będzie wiązarem, A niepustym zbiorem, G będzie T -grupą oraz $\rho_A : G \rightarrow S_A$ będzie monomorfizmem takim, że odwzorowanie

$$G \times A \rightarrow A \times A, \quad (g, a) \mapsto (\rho_A(g)(a), a)$$

jest bijekcją. Trójkę (A, G, ρ_A) nazywamy **przestrzenią T -afiniczną**.

Uwaga

Ustalmy odwzorowanie $\omega : G \times A \rightarrow A$. Trójka (A, G, ω) jest przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{F}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla $\rho_A(g)(a) := \omega(g, a)$ trójka (A, G, ρ_A) jest przestrzenią $T(\mathbb{F})$ -afiniczną.

T.Brzeziński: *Trusses: Paragons, Ideals and modules*.

R.R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, B.Rybołowicz *Ideal ring extensions and trusses*.

S.Breaz, T.Brzeziński, B.Rybołowicz, P.Saracco *Heaps of modules: categorical aspects*.