

Proces stochastyczny

Proces stochastyczny to zmienna, która zmienia się w czasie w sposób niepewny i losowy.

W tym plakacie opracujemy proces stochastyczny o zmiennej ciągłej i czasie ciągłym dla cen akcji.

Proces Markowa

Proces Markowa to proces stochastyczny, w którym **tylko obecna wartość** zmiennej ma znaczenie przy przewidywaniu przyszłości. **Historia przeszła jest nieistotna.**

Przykład: Jeśli cena akcji IBM wynosi teraz 100\$, a akcje podążają według procesu Markowa, prognozy przyszłej ceny zależą **wyłącznie** od obecnej ceny, a nie od cen z przeszłości.

Mechanizm rynkowy: Założenie, że ceny akcji podlegają procesowi Markowa, wynika z **hipotezy efektywnego rynku**. Gdyby ceny miały przewidywalny wzorec oparty na ich historii, racjonalni inwestorzy natychmiast wykryliby tę zależność i wykorzystali ją, kupując lub sprzedając akcje. Ta ich reakcja – czyli **arbitraż** – doprowadziłaby do natychmiastowej korekty cen, która zniszczyłaby ów wzorec i uniemożliwiła dalsze czerpanie z niego zysków. Dlatego w efektywnym rynku jedyna istotna informacja jest zawarta w cenie bieżącej.

Proces Wienera (Ruch Browna)

Zmienna z podlega **procesowi Wienera**, jeżeli spełnia następujące warunki:

1. Zmiana w małym przedziale czasu Δt :

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

gdzie $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ma standardowy rozkład normalny.

2. Zmiany w rozłącznych przedziałach czasu są **niezależne** (własność Markowa).

Własności:

- Wartość oczekiwana $\Delta z = 0$
- Wariancja $\Delta z = \Delta t$
- Odchylenie standardowe $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$

Dla przedziału czasu T :

$$z(T) - z(0) \sim \mathcal{N}(0, T)$$

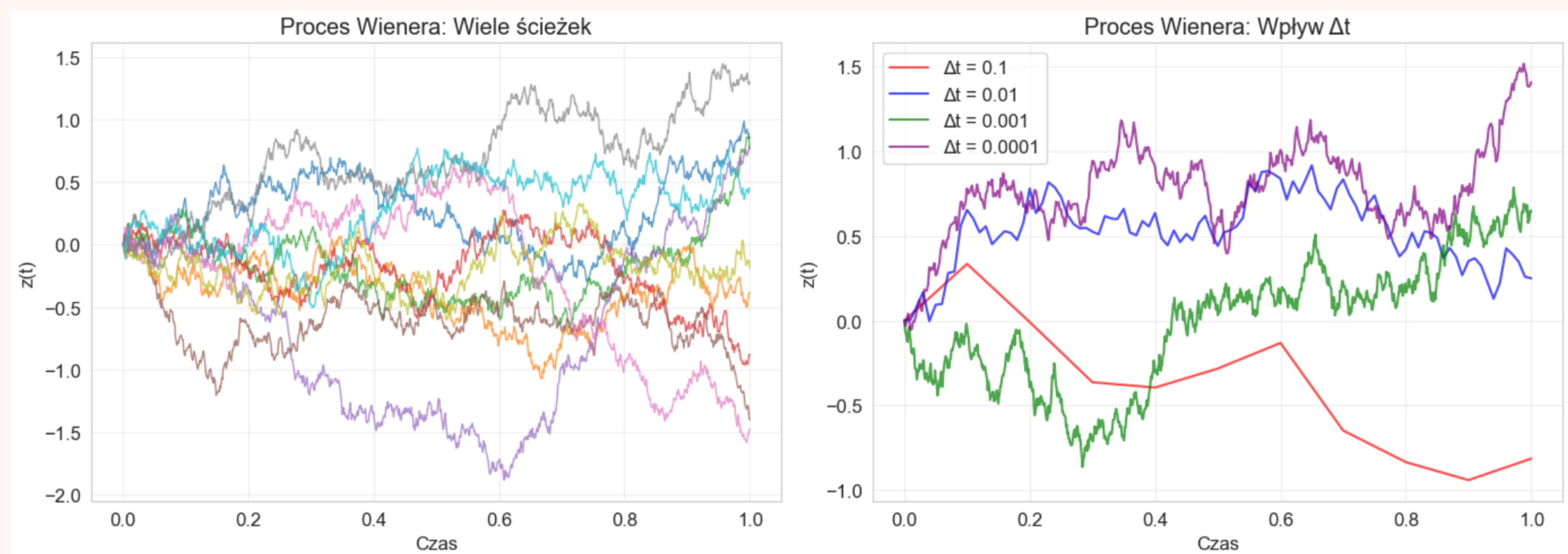


Figure 1. Proces Wienera w działaniu. **Lewy panel:** kilka niezależnych losowych ścieżek. **Prawy panel:** zmniejszanie kroku czasowego Δt ilustruje, dlaczego ścieżki procesu Wienera są tak nieregularne („ząbkowane”) – ponieważ zmiana z w czasie Δt jest proporcjonalna do $\sqrt{\Delta t}$, a nie do Δt . W granicy $\Delta t \rightarrow 0$ prowadzi to do dwóch paradoksalnych własności: 1) oczekiwana długość ścieżki w dowolnym przedziale czasu jest **nieskończona**; 2) oczekiwana liczba powrotów do dowolnej wartości w dowolnym przedziale czasu jest **nieskończona**.

Procesy stochastyczne pochodne od procesu Wienera

Uogólniony proces Wienera

Proces z parametrami stałymi

$$dx = a dt + b dz$$

- a, b - stałe
- $\mathbb{E}[dx] = a dt$
- $\text{Var}[dx] = b^2 dt$
- $\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$

Zastosowanie:

Modele z liniowym dryfem i stałą zmiennością.

Uwaga: Proces Itô jest uogólnieniem procesu Wienera. Gdy $a(x, t) = a$ i $b(x, t) = b$ są stałe, proces Itô redukuje się do uogólnionego procesu Wienera.

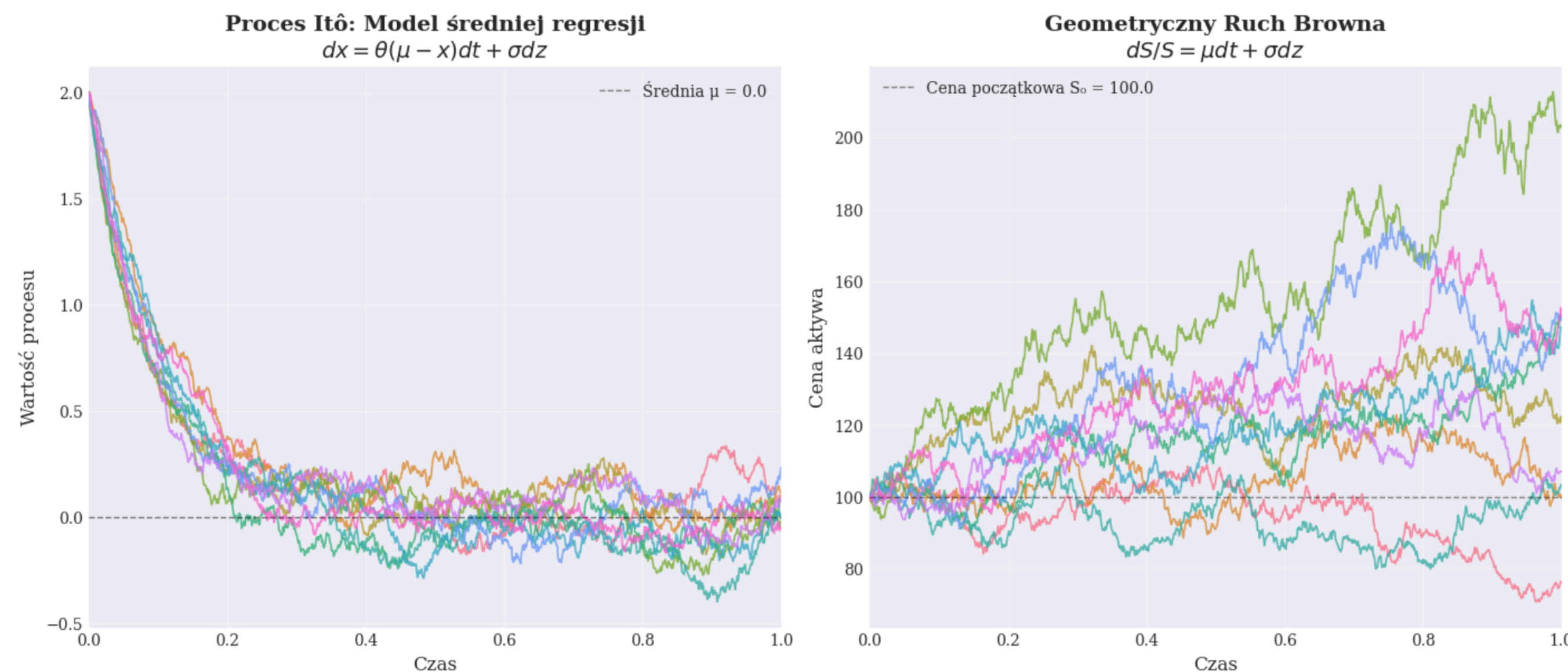


Figure 2. **Proces Itô (lewo):** $dx = \theta(\mu - x)dt + \sigma dz$, $\theta = 10.0$, $\mu = 0.0$, $\sigma = 0.5$, $x_0 = 2.0$. Wykazuje średnią regresję. **Geometryczny Ruch Browna (prawo):** $dS/S = \mu dt + \sigma dz$, $S_0 = 100.0$, $\mu = 0.15$, $\sigma = 0.3$. Modeluje ceny z log-normalnym rozkładem.

Geometryczny Ruch Browna (Geometric Brownian Motion)

Postać ciągła

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

- dS/S = względna zmiana ceny
- μ = oczekiwana stopa zwrotu
- σ = zmienność (volatility)
- dz = proces Wienera

Filozofia modelu:

Inwestorzy oczekują stałej stopy zwrotu *procentowej niezależnie od poziomu ceny akcji*.

Postać dyskretna

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

- $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $\mathbb{E}[\Delta S/S] = \mu \Delta t$
- $\text{Var}[\Delta S/S] = \sigma^2 \Delta t$

Zastosowania:

- Symulacje Monte Carlo
- Wycena opcji (Black-Scholes)
- Prognozowanie cen akcji

Kluczowa własność: Geometryczny ruch Browna implikuje log-normalny rozkład przyszłych cen akcji: $\ln S_T \sim \mathcal{N}(\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma^2 T)$.

Lemat Itô — intuicja i twierdzenie

Intuicja: Lemat Itô pozwala określić, jak zmienia się funkcja $G(x, t)$ w czasie, gdy sama zmienna x podlega stochastycznemu procesowi z dryfem $a(x, t)$ i zmiennością $b(x, t)$.

Kluczowa obserwacja: W rachunku stochastycznym, w przeciwieństwie do rachunku klasycznego, kwadrat przyrostu procesu Wienera $(dz)^2$ zachowuje się jak dt . To powoduje, że rozwinięcie Taylora funkcji G musi uwzględniać składnik drugiego rzędu względem dx .

Twierdzenie (wersja ogólna): Jeśli $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$, to dla dostatecznie gładkiej funkcji $G(x, t)$:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz.$$

Interpretacja:

- Składnik $\frac{\partial G}{\partial x} a$ – dryf G wynikający z dryfu x .
- Składnik $\frac{\partial G}{\partial t}$ – zmiana G z czasem przy ustalonym x .
- Składnik $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$ – poprawka stochastyczna wynikająca z niestatej zmienności x .
- Składnik $\frac{\partial G}{\partial x} b dz$ – źródło losowości G , dzielone z procesem x .

Wniosek: G dziedziczy to samo źródło niepewności (dz) co x , ale jej dynamika jest modyfikowana przez lokalne własności funkcji (pochodne).

Zastosowanie lematu Itô do wyceny kontraktów forward

Niech cena aktywa bazowego S podlega geometrycznemu ruchowi Browna:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

gdzie μ to oczekiwana stopa zwrotu, σ – zmienność, dz – przyrost procesu Wienera.

Cena forward w chwili t wynosi:

$$F(t, T) = S(t)e^{r(T-t)},$$

gdzie r to stała stopa wolna od ryzyka.

Stosując lemat Itô do $F(t, T)$, mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}.$$

Zatem proces stochastyczny dla ceny forward:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} \right] dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dz.$$

Podstawiając F i upraszczając:

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dz.$$

Wniosek: Cena forward F również podlega geometrycznemu ruchowi Browna, ale z dryfem $\mu - r$, czyli nadwyżką stopy zwrotu aktywa nad stopą wolną od ryzyka. Zmienność σ pozostaje niezmieniona.

References

[1] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 7th edition, 2009. ISBN 978-0-13-500994-9.