

Analiza zjawiska wędrówki chaotycznej za pomocą entropii i uczenia maszynowego

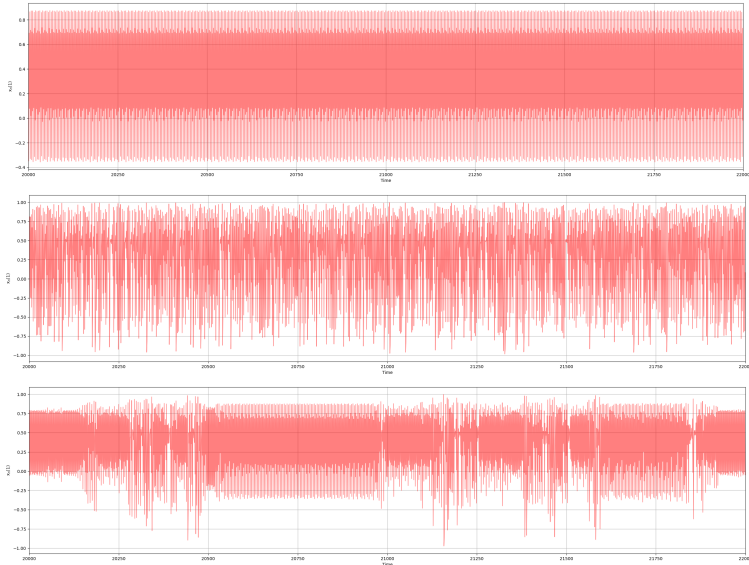
Nikodem Mierski
we współpracy z dr. hab. Pawłem Pilarczykiem, prof. PG

Politechnika Gdańska

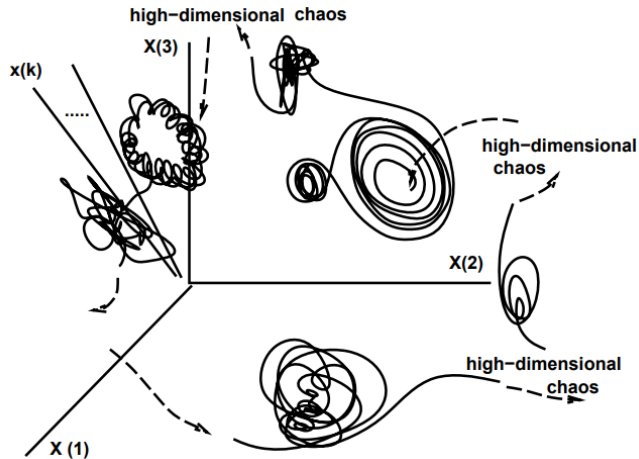
Badania prowadzone przy wsparciu Narodowego Centrum Nauki poprzez grant OPUS 2021/41/B/ST1/00405
oraz Centrum Informatyczne Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej

6 grudnia 2025

Porządek, chaos i...



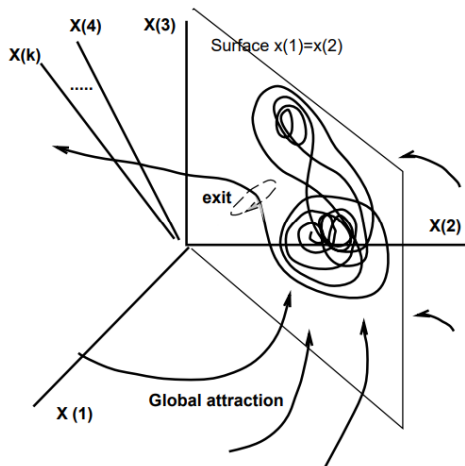
Pojęcie wędrówki chaotycznej



Schematyczna reprezentacja wędrówki chaotycznej

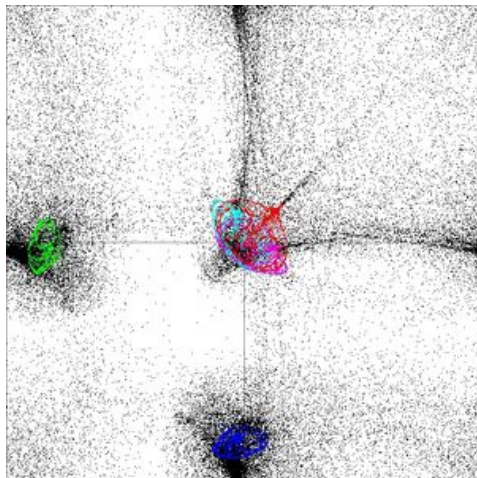
Źródło: Kaneko, K., & Tsuda, I. (2003). *Chaotic itinerancy*. *Chaos*, 13(3), 926-936

Ruiny atraktorów



Schematyczna reprezentacja ruiny atraktora

K. Kaneko, I. Tsuda, *Chaotic Itinerancy*, Chaos **13** (2003)



Portret fazowy z zaznaczonymi ruinami

I. Tsuda. *Chaotic itinerancy*. Scholarpedia **8** (2013)

Globalnie sprzężone odwzorowania logistyczne

$$\text{GCM}_{a,\varepsilon}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f_a(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_a(x_n(j))$$

$i = 1, 2, \dots, N = \text{wymiar układu}$

$$f_a(x) = 1 - ax^2$$

Entropia Shannona

Entropia to miara niepewności lub ilości informacji zawartej w zmiennej losowej. Dla dyskretnej zmiennej losowej X o rozkładzie prawdopodobieństwa $P(X = x_i) = p_i$, *entropia Shannona* definiowana jest jako:

$$H(X) = - \sum_i p_i \log_2 p_i$$

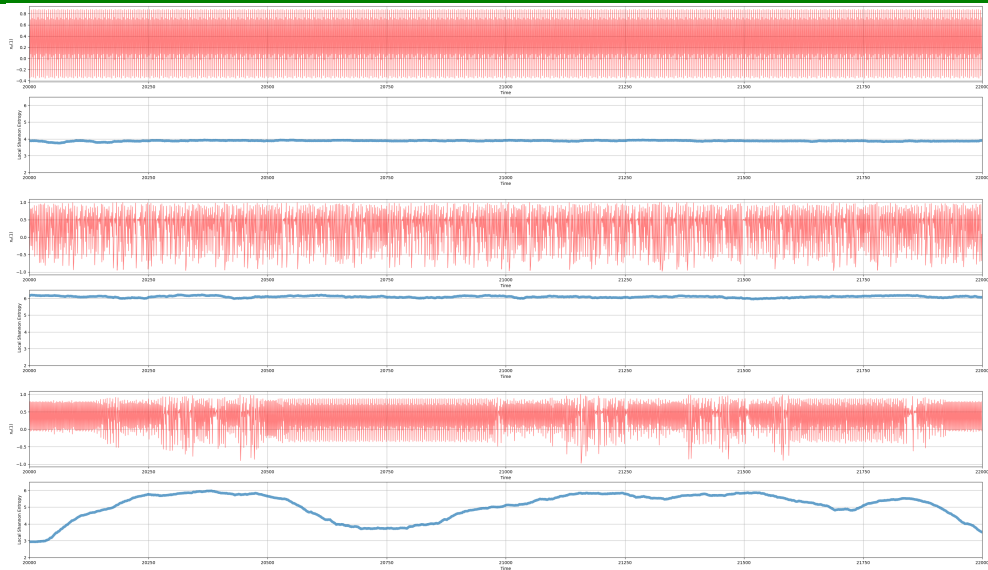
Definiujemy *lokalną entropię Shannona* dla danego punktu ciągu $X = (x_i)_{i=1}^n$ jako:

$$H_{\text{local}}(j) = H(X_{j-100,j+100}),$$

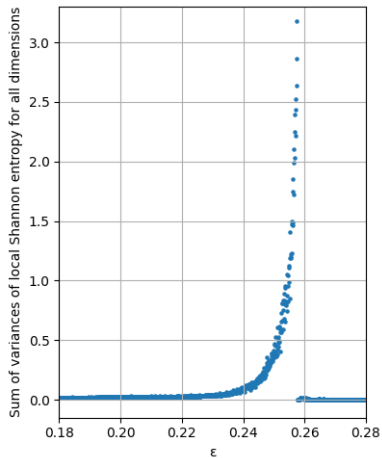
gdzie $X_{j-100,j+100}$ oznacza fragment ciągu X zawierający 201 kolejnych elementów od x_{j-100} do x_{j+100} , włącznie.



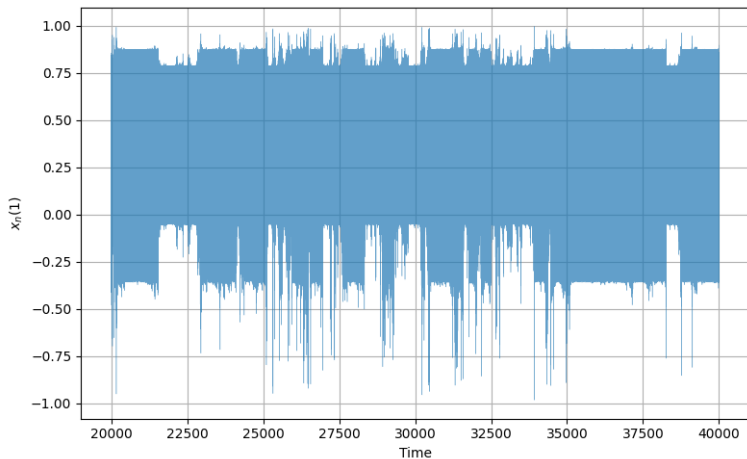
Lokalna entropia Shannona



Wariancja lokalnej entropii Shannona

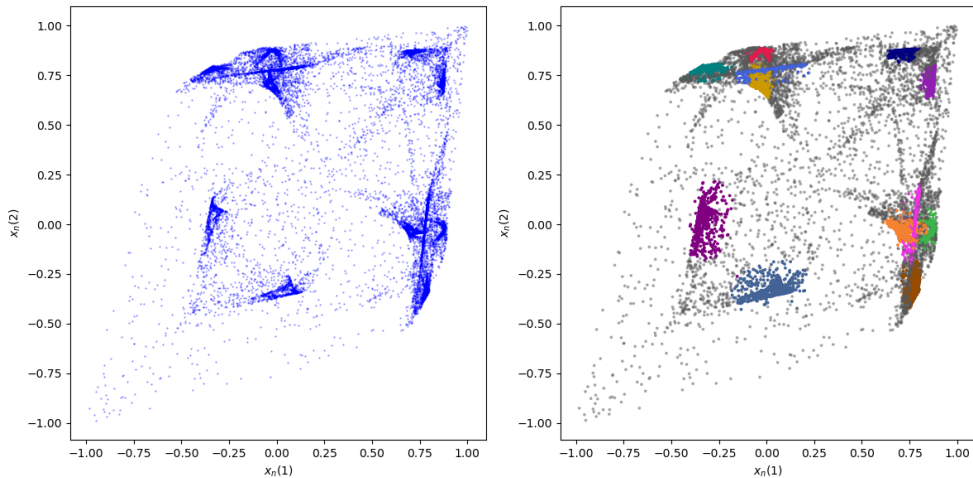


Suma wariancji lokalnej entropii



Szereg czasowy $x_n(1)$ dla $N = 3$, $a = 2.0$, $\epsilon = 0.2574$

HDBSCAN



Skupiska otrzymane za pomocą algorytmu HDBSCAN dla $N = 3$, $a = 2.0$, $\epsilon = 0.2574$

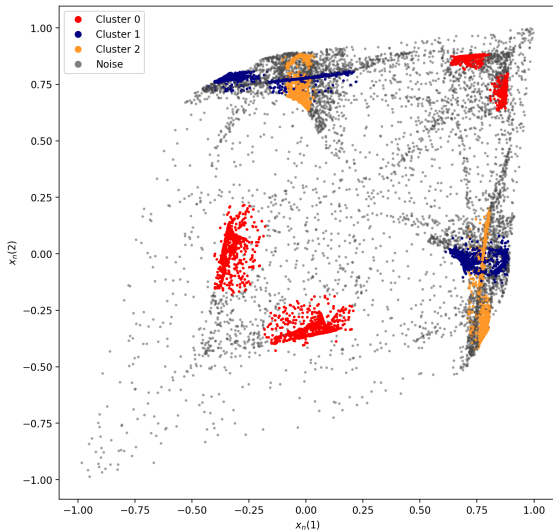
Analiza skupisk

Skupisko	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ilość punktów	5731	844	836	1557	1562	1251	1227	1550	1571	780	783	1153	1155

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-1	5151	71	63	68	73	113	89	34	43	6	5	8	6
0	70	0	0	0	0	0	0	0	0	774	0	0	0
1	58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	778	0	0
2	40	0	0	0	0	0	0	1516	1	0	0	0	0
3	35	0	0	0	0	0	0	0	1527	0	0	0	0
4	101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1149
5	83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1144	0
6	61	0	0	0	1489	0	0	0	0	0	0	0	0
7	82	0	0	1489	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7	0	773	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	10	773	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	15	0	0	0	0	1138	0	0	0	0	0	0	0
11	17	0	0	0	0	0	1138	0	0	0	0	0	0

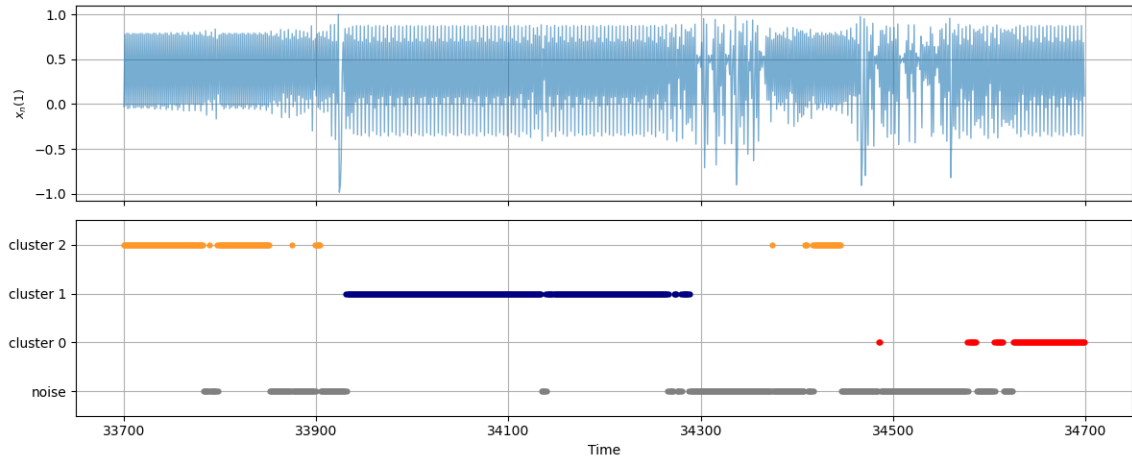
Liczba przejść między skupiskami

Kolejne skupiska odwiedzone przez trajektorię



Ruina atraktora	Szum	0	1	2
Średni czas	26,7	59,9	74,3	53,7
Mediana czasów	17	11	8	8
Odchylenie standardowe czasów	29,1	115,9	232,7	93,6
Liczba odwiedzin	224	53	83	87

Szereg czasowy i przynależność do skupisk



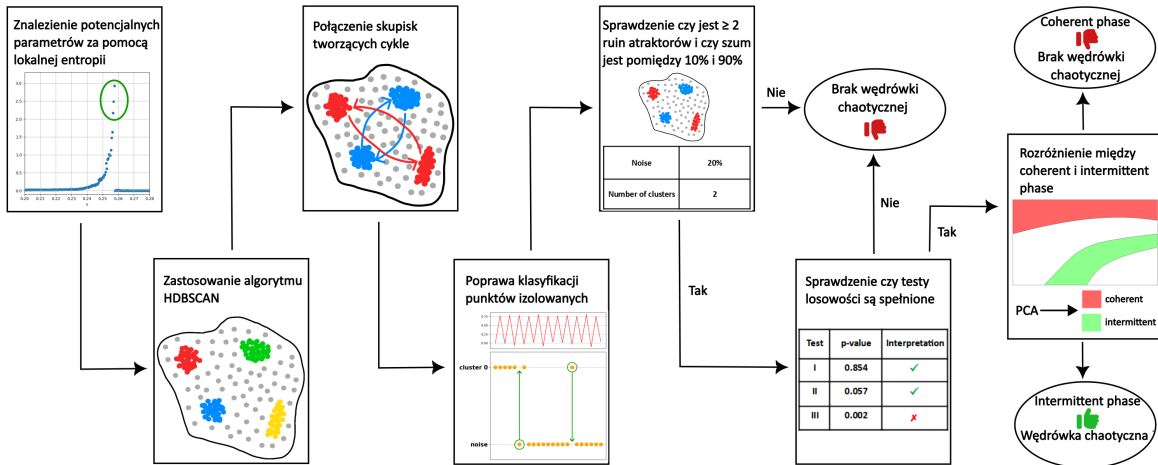
Fragment szeregu czasowego i przynależność do skupisk

Testowanie losowości dynamiki

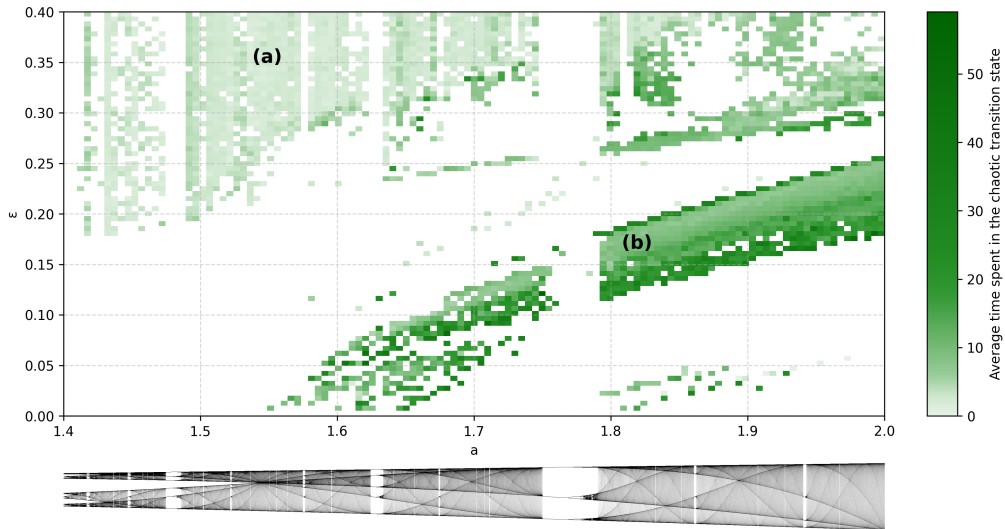
- 1) Test Ljunga–Boxa, który pozwala określić, czy szereg czasowy wykazuje istotną autokorelację.
- 2) Uogólniony test Dickeya–Fullera (Augmented Dickey–Fuller test), który sprawdza obecność pierwiastka jednostkowego w szeregu czasowym, co pozwala stwierdzić, czy szereg jest niestacjonarny.
- 3) Test serii Walda–Wolfowitza, który może być użyty do oceny losowości w szeregu czasowym.

Test	p-value	Interpretacja
Test Ljunga–Boxa	0,784	Brak wykrywalnej autokorelacji
Test Dickeya–Fullera	0,000	Brak oznak niestacjonarności
Test serii	0,659	Brak dowodów na nielosowość

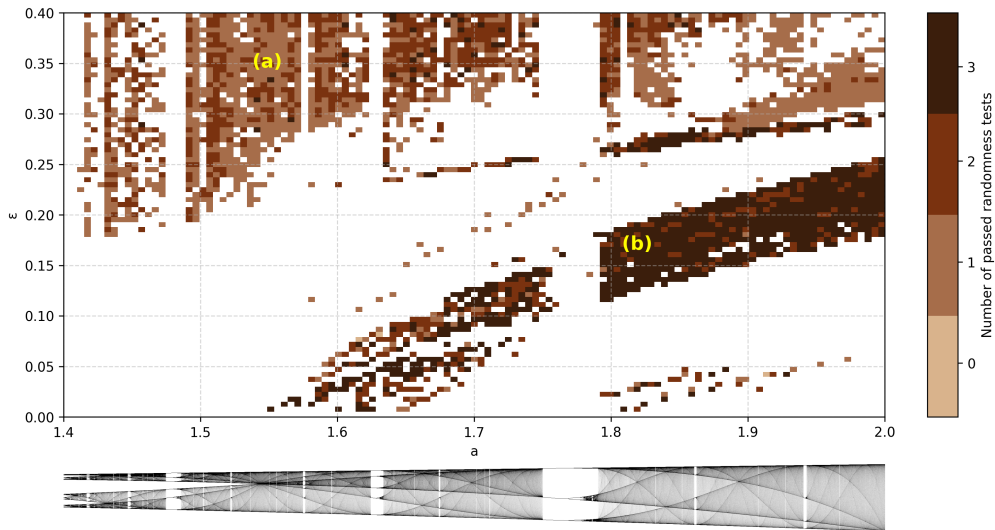
Procedura wykrywania wędrówki chaotycznej



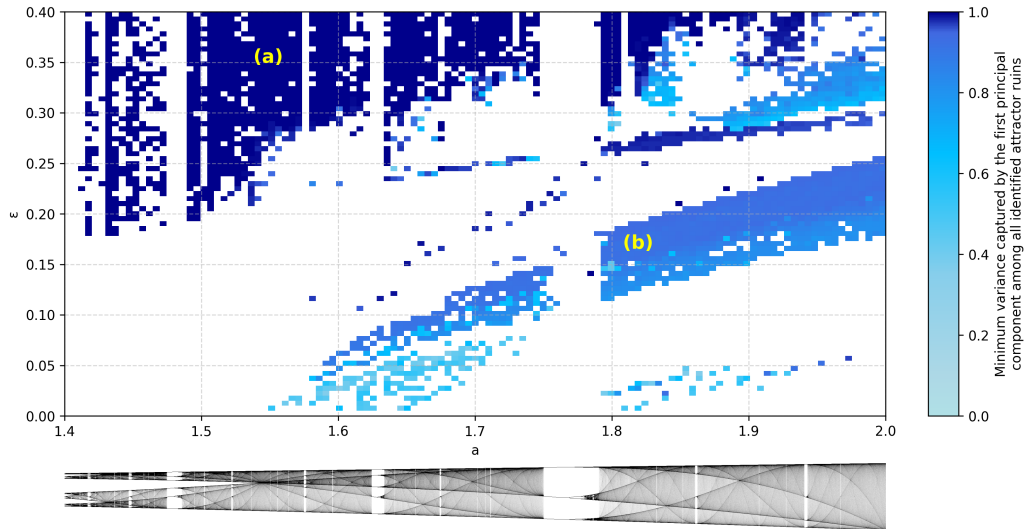
Średni czas wędrówki między skupiskami



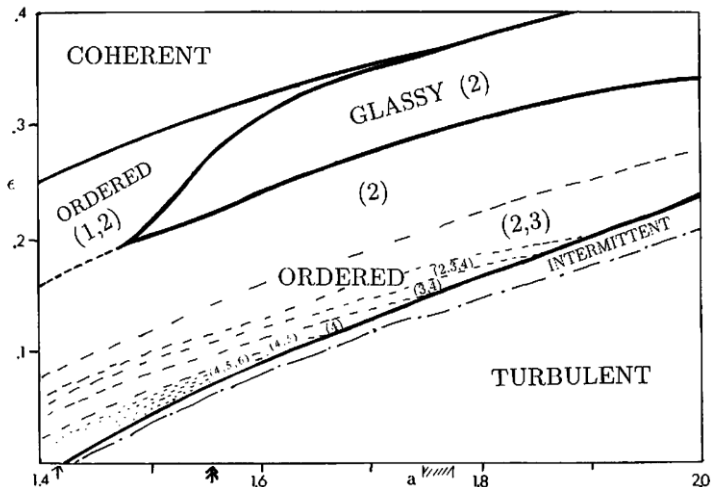
Wyniki testów statystycznych



Wymiary ruin atraktorów

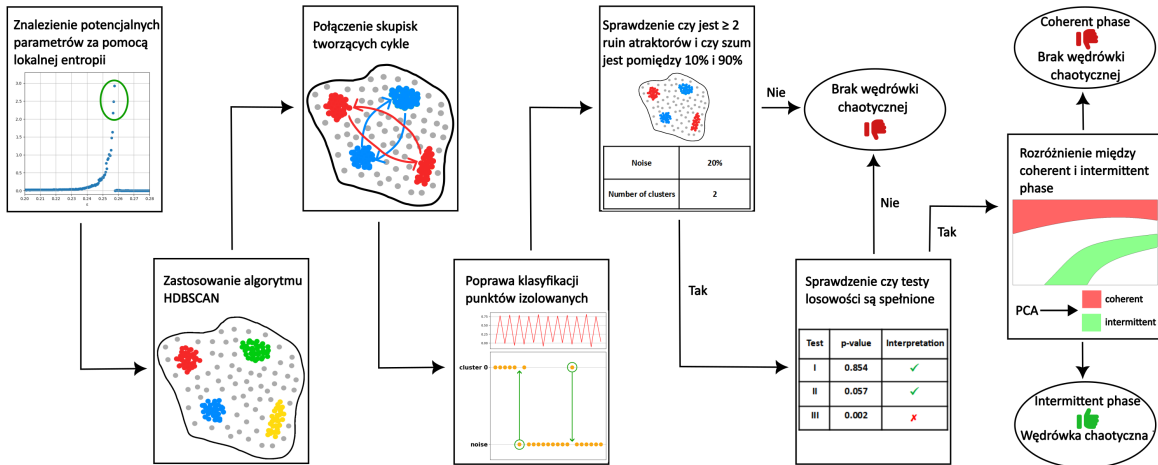


Coherent i intermittent phases



Źródło: Kaneko, K. (1990). Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 41(2), 137-172

Procedura wykrywania wędrówki chaotycznej



Wędrówka chaotyczna

Podsumowanie:

- Wędrówka chaotyczna jest zjawiskiem łączącym porządek i chaos — trajektoria węduje między ruinami atraktorów.
- Analiza lokalnej entropii pozwala znaleźć parametry, dla których możemy potencjalnie zaobserwować wędrówkę chaotyczną.
- Algorytm grupowania HDBSCAN umożliwia identyfikację ruin atraktorów.

Zastosowania wędrówki chaotycznej:

- modelowanie aktywności ludzkiego mózgu
- symulowanie dynamiki złożonych układów biologicznych
- tworzenie wzorców poruszania się robotów

Mierski, N., & Pilarczyk, P. (2025). Analysis of the chaotic itinerancy phenomenon using entropy and clustering. *PHYSICAL REVIEW E*, 112, 054223. <https://doi.org/10.1103/bcwd-nx7r>